CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E1700

(1) Una compañía que fabrica escritorios los vende a \$200 cada uno. Si se fabrican y venden x escritorios cada semana, el gasto total por la producción y la venta (semanal) viene dado por la función:

$$G(x) = x^2 + 40x + 1500,$$

considerando que siempre se vende toda la producción semanal.
¿Cuántos escritorios se deben fabricar semanalmente para que haya ganancia?

(2) Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t - 11}$ & $g(u) = |\,2u - 1\,|$,
obtener: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y los dominios de las funciones $f \circ g$ & $g \circ f$.

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x^3-1}\right]$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 6} + x)$

(5) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva

$$2(x^2 + y^2)^2 = 25(x^2 - y^2)$$

en el punto $(3, 1)$

(6) Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar $12,000$ $pies^3$ de agua. Si el concreto para construir la base y los lados tiene un costo de \$100 por $pies^2$ y el material para construir la tapa cuesta \$200 por $pies^2$, ¿cuáles son las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción?

(7) Dada la función definida por $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 1$,
obtener: intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos críticos (y clasificarlos), intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

(8) Un disco metálico de grosor despreciable se dilata radialmente por el calor y su radio aumenta a razón de 0.02 pulgadas por minuto. Determinar la razón a la cual aumenta el área de cada una de sus caras cuando su radio es de 8.1 pulgadas.

(9) Dar un bosquejo de la gráfica de la función f que cumple los requisitos siguientes:

$f(-3) = 1$	$f(0) = 3$
$f(2) = 0$	$f(4) = -3$
$f(5) = -2$	$f'(4) = 0$
$f''(5) = 0$	$\displaystyle\lim_{x\to -\infty} f(x) = -1$
$\displaystyle\lim_{x\to -3} f(x) = 0$	$\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$
$\displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = -1$	$f'(x) > 0$ para $x < -3$, $-3 < x < 1$ y $x > 4$
$f'(x) < 0$ para $1 < x < 4$	$f''(x) > 0$ para $x < -3$, $-3 < x < 1$ y $1 < x < 5$
$f''(x) < 0$ para $x > 5$	

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Una compañía que fabrica escritorios los vende a \$200 cada uno. Si se fabrican y venden x escritorios cada semana, el gasto total por la producción y la venta (semanal) viene dado por la función:

$$G(x) = x^2 + 40x + 1500,$$

considerando que siempre se vende toda la producción semanal.
¿Cuántos escritorios se deben fabricar semanalmente para que haya ganancia?

▼ Al vender x escritorios a \$200 cada uno, se obtiene un ingreso semanal de

$$I(x) = 200x\,.$$

La ganancia o la pérdida que se tenga semanalmente, depende de la diferencia (D) entre I & G

$$D(x) = I(x) - G(x) = 200x - (x^2 + 40x + 1500) =$$
$$= 200x - x^2 - 40x - 1500 = -x^2 + 160x - 1500\,.$$

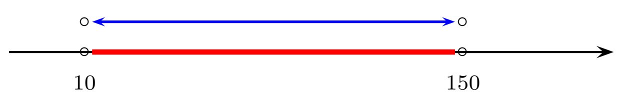
Si $D(x) > 0$, entonces hay ganancias; si $D(x) < 0$, hay pérdidas y si $D(x) = 0$, entonces no hay ganancias ni pérdidas.

$$D(x) > 0 \Leftrightarrow -x^2 + 160x - 1500 > 0 \Leftrightarrow (-1)(-x^2 + 160x - 1\,500) < 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 160x + 1\,500 < 0 \Leftrightarrow (x - 10)(x - 150) < 0\,.$$

Desigualdad que se cumple cuando

$$\begin{array}{ccc} x - 10 < 0 \ \& \ x - 150 > 0 & \text{o bien} & x - 10 > 0 \ \& \ x - 150 < 0; \\ x < 10 \ \& \ x > 150 & \text{o bien} & x > 10 \ \& \ x < 150; \\ x \text{ no existe} & \text{o bien} & 10 < x < 150\,. \end{array}$$

Es decir, $D(x) > 0$ cuando $10 < x < 150$.
Esto es, hay ganancia cuando el total x de escritorios fabricados está entre 10 y 150.



□

(2) Dadas las funciones $f(t) = \sqrt{t - 11}$ & $g(u) = |\,2u - 1\,|$,
obtener: $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y los dominios de las funciones $f \circ g$ & $g \circ f$.

▼ Para las funciones $f(t) = \sqrt{t - 11}$ & $g(u) = |\,2u - 1\,|$ se tienen:

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(|\,2x - 1\,|) = \sqrt{|\,2x - 1\,| - 11}\,.$$

Y su dominio es:

$$\begin{aligned} D_{f \circ g} &= \left\{ x \,\middle|\, x \in D_g \ \& \ g(x) \in D_f \right\} = \\ &= \left\{ x \,\middle|\, |\,2x - 1\,| \in \mathbb{R} \ \& \ \sqrt{|\,2x - 1\,| - 11} \in \mathbb{R} \right\} = \\ &= \left\{ x \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \ \& \ |\,2x - 1\,| - 11 \geq 0 \right\} = \left\{ x \,\middle|\, |\,2x - 1\,| \geq 11 \right\} = \\ &= \left\{ x \,\middle|\, 2x - 1 \leq -11 \text{ o bien } 2x - 1 \geq 11 \right\} = \\ &= \left\{ x \,\middle|\, 2x \leq -10 \text{ o bien } 2x \geq 12 \right\} = \left\{ x \,\middle|\, x \leq -5 \text{ o bien } x \geq 6 \right\} = \\ &= (-\infty, -5] \bigcup [6, +\infty) = \mathbb{R} - (-5, 6). \end{aligned}$$

$$(g\circ f)(x) = g[f(x)] = |\,2f(x)-1\,| = \left|\,2\sqrt{x-11}-1\,\right| .$$

Y su dominio es:

$$\begin{aligned}
D_{g\circ f} &= \left\{\, x \,\middle|\, x \in D_f \;\&\; f(x) \in D_g \,\right\} = \\
&= \left\{\, x \,\middle|\, \sqrt{x-11} \in \mathbb{R} \;\&\; \left|\,2\sqrt{x-11}-1\,\right| \in \mathbb{R} \,\right\} = \\
&= \left\{\, x \,\middle|\, \sqrt{x-11} \in \mathbb{R} \,\right\} = \left\{\, x \,\middle|\, x-11 \geq 0 \right\} = \left\{\, x \,\middle|\, x \geq 11 \,\right\} = \\
&= [11, +\infty) .
\end{aligned}$$

□

(3) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right]$

▼ Vemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right] = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{3}{(x-1)(x^2+x+1)}\right] = \\
&\lim_{x\to 1}\frac{(x^2+x+1)-3}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(x-1)(x^2+x+1)} = \\
&\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1+2}{1^2+1+1} = \frac{3}{3} = 1
\end{aligned}$$

Esto es, $\displaystyle\lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{x-1}-\frac{3}{x^3-1}\right] = 1$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+2x+6}+x)$

▼ Tenemos que

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+2x+6}+x) = \lim_{x\to -\infty}\left[(\sqrt{x^2+2x+6}+x)\frac{\sqrt{x^2+2x+6}-x}{\sqrt{x^2+2x+6}-x}\right] = \\
&= \lim_{x\to -\infty}\frac{(x^2+2x+6)-x^2}{\sqrt{x^2+2x+6}-x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{2x+6}{\sqrt{x^2+2x+6}-x} = \\
&= \lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(2+\dfrac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}\right)}-x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(2+\dfrac{6}{x}\right)}{\sqrt{x^2}\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-x} = \\
&= \lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(2+\dfrac{6}{x}\right)}{|\,x\,|\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-x} = \lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(2+\dfrac{6}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}-x} = \\
&= \lim_{x\to -\infty}\frac{x\left(2+\dfrac{6}{x}\right)}{-x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1\right)} = \lim_{x\to -\infty}\frac{2+\dfrac{6}{x}}{-\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x}+\dfrac{6}{x^2}}+1\right)} =
\end{aligned}$$

$$= \frac{2}{-(\sqrt{1}+1)} = \frac{2}{-2} = -1$$

Esto es, $\lim\limits_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+2x+6}+x) = -1$.

(5) Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva

$$2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$$

en el punto $(3,1)$

▼ Suponemos que en la ecuación dada se tiene implícitamente definida a $y=\phi(x)$. Derivando implícitamente con respecto a x se obtiene

$$2\frac{d}{dx}(x^2+y^2)^2 = 25\frac{d}{dx}(x^2-y^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(x^2+y^2)\frac{d}{dx}(x^2+y^2) = 25\frac{d}{dx}(x^2-y^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(x^2+y^2)\left(2x+2y\frac{dy}{dx}\right) = 25\left(2x-2y\frac{dy}{dx}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(x^2+y^2)2x + 4(x^2+y^2)2y\frac{dy}{dx} = 50x - 50y\frac{dy}{dx} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 8y(x^2+y^2)\frac{dy}{dx} + 50y\frac{dy}{dx} = 50x - 8x(x^2+y^2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (8x^2y+8y^3+50y)\frac{dy}{dx} = 50x-8x^3-8xy^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{50x-8x^3-8xy^2}{8x^2y+8y^3+50y}$$

Valuamos $\dfrac{dy}{dx}$ en el punto $(3,1)$, para así obtener la pendiente m de la recta tangente

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,1)} = \frac{50(3)-8(3)^3-8(3)(1)^2}{8(3)^2(1)+8(1)^3+50(1)} = \frac{150-216-24}{72+8+50} = \frac{-9}{13}$$
$$m = -\frac{9}{13}.$$

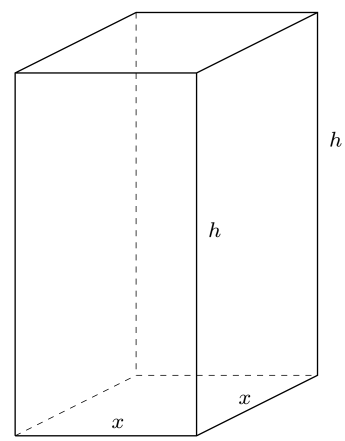
La ecuación de la recta tangente es

$$y-1 = -\frac{9}{13}(x-3) \Rightarrow y = -\frac{9}{13}x + \frac{27}{13} + 1 \Rightarrow y = -\frac{9}{13}x + \frac{40}{13}$$

□

(6) Se va a construir una cisterna rectangular con base y tapa cuadradas para almacenar $12,000$ *pies*^{3} de agua. Si el concreto para construir la base y los lados tiene un costo de \$100 por *pies*^{2} y el material para construir la tapa cuesta \$200 por *pies*^{2}, ¿cuáles son las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción?

▼ ¿Qué se quiere en el problema?
Se quieren determinar las dimensiones de la cisterna que minimizan el costo de su construcción.
Suponiendo que las dimensiones de la cisterna son: x *pies* en el lado de la base cuadrada y h *pies* en su altura. ¿Cuál es el costo de su construcción?



	Costo unitario	Área	Costo total
base	$100\,\$/pies^2$	$x^2 pies^2$	$\$100x^2$
tapa	$200\,\$/pies^2$	$x^2 pies^2$	$\$200x^2$
lados	$100\,\$/pies^2$	$4xhpies^2$	$\$400xh$
	Cisterna $\longrightarrow \$300x^2 + 400xh$		

El costo total de la contrucción de la cisterna es

$$C = 300x^2 + 400xh, \text{ pesos}$$

De nuevo, ¿qué se quiere en el problema? se quiere determinar los valores de x y h que hacen mínimo el valor del costo total C.
Pero, ¿existe alguna restricción en el problema?
Sí, que el volumen $V = x^2h$ de esta cisterna debe ser igual a 12000 $pies^3$, es decir que $x^2h = 12000$
Tenemos pues en el problema: una función $C = 300x^2 + 400xh$ y una ecuación $x^2h = 12000$.
De la ecuación despejamos a una de las variables (la que más convenga) para sustituirla en la función. Conviene despejar h.

$$x^2h = 12000 \Rightarrow h = \frac{12000}{x^2}$$

Sustituyendo en la función se obtiene

$$C = 300x^2 + 400xh = 300x^2 + 400x\left(\frac{12000}{x^2}\right)$$

$$C(x) = 300x^2 + \frac{4800000}{x}$$

Que es la función (de x) que se quiere minimizar.

$$C(x) = 300x^2 + 4800000x^{-1} \Rightarrow C'(x) = 600x - 4800000x^{-2}$$

Luego entonces

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 600x - \frac{4800000}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 600x = \frac{4800000}{x^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3 = \frac{4800000}{600} = 8000 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{8000} = 20$$

Es decir, la función $C(x)$ tiene un punto crítico en $x = 20$. Ahora bien,

$$C'(x) = 600x - 4800000x^{-2} \Rightarrow C''(x) = 600 + 9600000x^{-3} > 0 \text{ para cualquier } x > 0$$

Lo cual implica la existencia de un mínimo para $C(x)$.
Es decir, el costo C de la cisterna es mínimo cuando $x = 20$ *pies* y

$$h = \frac{12000}{x^2} = \frac{12000}{(20)^2} = \frac{12000}{400} = 30$$

Esto es, el costo es mínimo cuando $x = 20$ *pies* y $h = 30$ *pies*. Dicho costo mínimo es

$$\begin{aligned} C_{min} &= 300x^2 + 400xh \\ &= (300)(20)^2 + (400)(20)(30) = 120,000 + 240,000 \\ C_{min} &= \$360,000 \end{aligned}$$

□

(7) Dada la función definida por $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 1$,
obtener: intervalos de crecimiento y de decrecimiento, puntos críticos (y clasificarlos), intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo, puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

Para $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 1$ se tiene que $f'(x) = 15x^4 - 30x^2$ & $f''(x) = 60x^3 - 60x$

(a) Monotonía de la función.

▼ f es creciente si $f' > 0$ y f es decreciente si $f' < 0$.
Primero vemos donde $f' = 0$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 15x^4 - 30x^2 = 0 \Leftrightarrow 15x^2(x^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 0 \text{ o bien } x^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x^2 = 2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = -\sqrt{2} \text{ o bien } x = \sqrt{2}$$

Con estos números generamos los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$, $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$, $\left(0, \sqrt{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$, donde determinamos el signo de f'.

	valor prueba	$f'(x) =$	f es estrictamente
$x < -\sqrt{2}$	$x = -2$	$120 > 0$	creciente
$-\sqrt{2} < x < 0$	$x = -1$	$-15 < 0$	decreciente
$0 < x < \sqrt{2}$	$x = 1$	$-15 < 0$	decreciente
$x > \sqrt{2}$	$x = 2$	$120 > 0$	creciente

Luego entonces:
f es estrictamente creciente en los intervalos $\left(-\infty, -\sqrt{2}\right)$ y $\left(\sqrt{2}, +\infty\right)$
Y f es estrictamente decreciente en los intervalos $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(0, \sqrt{2}\right)$.

(b) Puntos críticos.

▼ f tiene puntos críticos donde $f' = 0$ y en el inciso anterior hemos visto que $f'(x) = 0$ en $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$.
Considerando el crecimiento y el decrecimiento de f y el criterio de la primera derivada, podemos afirmar que:
f tiene un máximo local estricto en $x = -\sqrt{2}$
Y tiene un mínimo local estricto en $x = \sqrt{2}$.
Aún más:
El punto máximo local está en $A[-\sqrt{2}, f(-\sqrt{2})] = A(-\sqrt{2}, 8\sqrt{2} + 1)$.
Y el mínimo local está en $B[\sqrt{2}, f(\sqrt{2})] = B(\sqrt{2}, -8\sqrt{2} + 1)$.

Notamos que en $x = 0$ se tiene un punto crítico que no es máximo ni mínimo local, ya que f es decreciente antes y después de $x = 0$.

(c) Concavidades de la función.

▼ f es cóncava hacia arriba donde $f'' > 0$ y f es cóncava hacia abajo donde $f'' < 0$.
Primero vemos donde $f'' = 0$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 60x^3 - 60x = 0 \Leftrightarrow 60x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x^2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ o bien } x = -1 \text{ o bien } x = 1$$

Con estos números generamos los intervalos $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, +\infty)$, donde determinamos el signo de f''.

	valor prueba	$f''(x) =$	f es cóncava hacia
$x < -1$	$x = -2$	$-360 < 0$	abajo
$-1 < x < 0$	$x = -\frac{1}{2}$	$\frac{45}{2} > 0$	arriba
$0 < x < 1$	$x = \frac{1}{2}$	$-\frac{45}{2} < 0$	abajo
$x > 1$	$x = 2$	$360 > 0$	arriba

Luego entonces:
f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -1) \bigcup (0, 1)$.
Y es cóncava hacia arriba en $(-1, 0) \bigcup (1, +\infty)$.

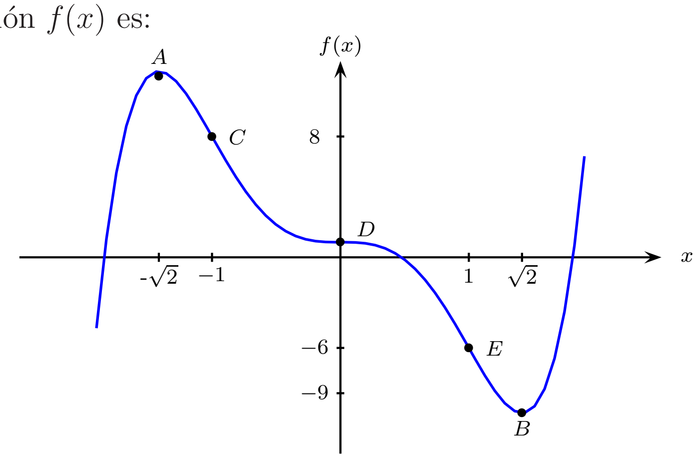
(d) Puntos de inflexión.

▼ Por el inciso anterior sabemos que f tiene cambios de concavidad en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.
Por ésto y por ser f una función continua en dichos puntos, podemos afirmar que f tiene puntos de inflexión en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$.
Aún más, los puntos de inflexión están en

$$C[-1, f(-1)] = C(-1, 8),\ D[0, f(0)] = D(0, 1) \text{ y } E[1, f(1)] = E(1, -6).$$

(e) Bosquejo de la gráfica.

▼ La gráfica de la función $f(x)$ es:



(8) Un disco metálico de grosor despreciable se dilata radialmente por el calor y su radio aumenta a razón de 0.02 pulgadas por minuto. Determinar la razón a la cual aumenta el área de cada una de sus caras cuando su radio es de 8.1 pulgadas.

▼ Por ser de grosor despreciable, el disco metálico puede ser considerado como un círculo cuyo radio r está en función del tiempo t.
Por lo mismo, el área $A = \pi r^2$ del círculo es función del tiempo t; es decir

$$A(t) = \pi[r(t)]^2$$

¿Qué se pide en el problema? Se pide calcular $\dfrac{dA}{dt}$ cuando $\dfrac{dr}{dt} = 0.02\ pulg/min$ y su radio es $r = 8.1$ pulgadas.

$$A = \pi r^2 \Rightarrow \frac{d}{dt}A = \frac{d}{dt}(\pi r^2) = \pi 2r\frac{dr}{dt} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = 2\pi r\frac{dr}{dt}$$

Al sustituir valores se obtiene

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi(8.1)(0.02) = 0.324\pi\, pulg^2/min.$$

(9) Dar un bosquejo de la gráfica de la función f que cumple los requisitos siguientes:

$f(-3) = 1$

$f(0) = 3$

$f(2) = 0$

$f(4) = -3$

$f(5) = -2$

$f'(4) = 0$

$f''(5) = 0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$

$\lim\limits_{x\to-3} f(x) = 0$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$

$f'(x) > 0$ para $x < -3$, $-3 < x < 1$ y $x > 4$

$f'(x) < 0$ para $1 < x < 4$

$f''(x) > 0$ para $x < -3$, $-3 < x < 1$ y $1 < x < 5$

$f''(x) < 0$ para $x > 5$

▼ Un bosquejo de la gráfica de f podría ser