CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
EVALUACIÓN GLOBAL E2100

(1) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = \sqrt{3-x}$ & $h(x) = x^2 - 1$, obtener: $(g/h)(x)$, $(h \circ f)(x)$ & $(g \circ h)(x)$, así como sus respectivos dominios.

(2) Dada la función definida por $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, obtener: raíces, intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

(3) A un depósito cilíndrico de 5 m de radio le está entrando agua a razón de 25 l por segundo. Calcular la rapidez a la que sube el nivel del agua. [Recordar que 1 l es igual a 1 dm^3.]

(4) Una página ha de contener 30 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

(5) Si se lanza una pelota hacia arriba desde la azotea de un edificio que tiene 25 m de altura con una velocidad inicial de 20 m/s, entonces la altura sobre el suelo t segundos después será $h(t) = 25 + 20t - 5t^2$. ¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 40 m arriba del suelo?

(6) La posición instantánea (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta, está dada por $s(t) = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos.
   (a) Calcular las velocidades promedio en cada uno de los siguientes intervalos: [3,4], [3.5,4], [4,4.5] y [4,5]
   (b) Utilizando la definición de derivada, calcular la velocidad instantánea de la partícula en $t = 4$ seg.

(7) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$, determinar: dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; su gráfica.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+4}$, $g(x) = \sqrt{3-x}$ & $h(x) = x^2 - 1$, obtener: $(g/h)(x)$, $(h \circ f)(x)$ & $(g \circ h)(x)$, así como sus respectivos dominios.

▼ Tenemos:

$$(g/h)(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{3-x}}{x^2-1};$$
$$(h \circ f)(x) = h[f(x)] = h(\sqrt{x+4}) = x + 4 - 1 = x + 3;$$
$$(g \circ h)(x) = g[h(x)] = g(x^2 - 1) = \sqrt{3 - (x^2 - 1)} = \sqrt{4 - x^2}.$$

Como $D_f = [-4, +\infty)$, $D_g = (-\infty, 3]$ & $D_h = \mathbb{R}$, tenemos:

$$D_{\frac{g}{h}} = \left\{ D_g \bigcap D_h \right\} - \left\{ x \in D_h \,\middle|\, h(x) = 0 \right\}.$$

Como $D_g \bigcap D_h = (-\infty, 3] \bigcap \mathbb{R} = (-\infty, 3]$ & $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$, entonces

$$D_{\frac{g}{h}} = (-\infty, 3] - \{ \pm 1 \} = (-\infty, -1) \bigcup (-1, 1) \bigcup (1, 3]\,;$$
$$D_{h \circ f} = \left\{ x \in D_f \,\middle|\, f(x) \in D_h \right\} = \left\{ x \in [-4, +\infty) \,\middle|\, \sqrt{x+4} \in \mathbb{R} \right\} = [-4, +\infty)\,;$$
$$D_{g \circ h} = \left\{ x \in D_h \,\middle|\, h(x) \in D_g \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 1 \in (-\infty, 3] \right\}.$$

Como $x^2 - 1 \le 3 \Leftrightarrow x^2 \le 4 \Leftrightarrow |\,x\,| \le 2 \Leftrightarrow x \in [-2, 2]$, resulta que $D_{g \circ h} = [-2, 2]$.

□

(2) Dada la función definida por $f(x) = 3x^5 - 5x^3$, obtener: raíces, intervalos de crecimiento y de decrecimiento; puntos críticos y su clasificación; intervalos de concavidad hacia arriba y de concavidad hacia abajo; puntos de inflexión y un bosquejo de la gráfica.

▼ Calculemos las raíces:

$$3x^5 - 5x^3 = x^3(3x^2 - 5) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0, 3x^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \&\ x^2 = \frac{5}{3} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0; |\,x\,| = \sqrt{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x = 0 \ \&\ x \approx \pm 1.2909944.$$

Que son las raíces de f, y que concuerdan con el hecho de que $f(x)$ es impar.

Para determinar los intervalos de crecimiento se deriva f

$$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0; x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x = 0; (x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \&\ x = \pm 1.$$

Estos tres puntos críticos $-1, 0$ & 1 dividen a la recta en cuatro intervalos donde la derivada tiene los siguientes valores:
Eligiendo arbitrariamente $\pm 2 \in (-\infty, -1) \bigcup (1, +\infty)$ se tiene que $f'(\pm 2) > 0 \Rightarrow f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$.

Análogamente, eligiendo $\pm\frac{1}{2} \in (-1, 0) \bigcup (0, 1)$ se ve que $f'\left(\pm\frac{1}{2}\right) < 0 \Rightarrow f(x)$ es decreciente en $(-1, 0)$ y en $(0, 1)$.

Como en $x = -1$, la función pasa de ser creciente a ser decreciente. Luego entonces,

$$[-1, f(-1)] = [-1, 3(-1)^5 - 5(-1)^3] = (-1, -3 + 5) = (-1, 2)$$

es un máximo relativo. Además, por ser $f(x)$ impar, el punto $(1,-2)$ es un mínimo relativo.

Siendo $f(x)$ decreciente en $(-1,0)$ y en $(0,1)$, en $(0,0)$ la función no tiene valor extremo.

Concavidad:
Para la concavidad se deriva nuevamente

$$f''(x) = 60x^3 - 30x = 30x(2x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \ \& \ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \approx \pm 0.7071067.$$

Se determina el signo de la segunda derivada en los cuatro intervalos donde la segunda derivada no es cero. En $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, eligiendo $-1 \in \left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ se tiene que $f''(-1) < 0$, luego $f(x)$ dirige su concavidad hacia abajo en $\left(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

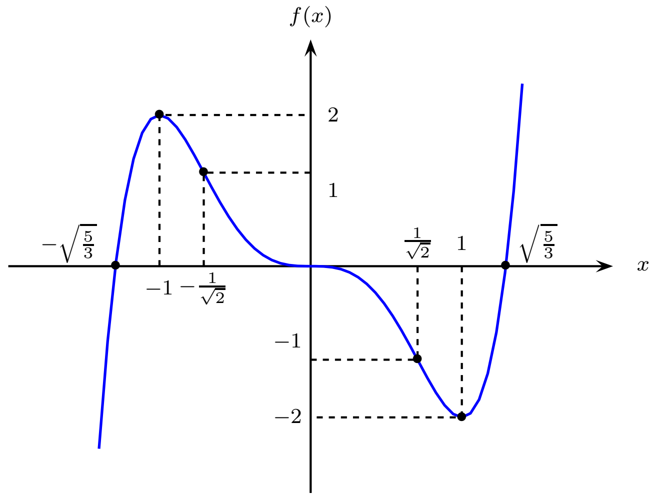
Y en $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},+\infty\right)$ la dirige hacia arriba, pues $f(x)$ es impar.
En $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $-\frac{1}{2} \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$, $f''\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$, luego $f(x)$ dirige su concavidad hacia arriba en $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)$.

Y en cambio la dirige hacia abajo en $\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, pues $f(x)$ es impar.

Puntos de inflexión:
Los tres puntos

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, 3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^5 - 5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right] = \\
&= \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -0.5303301 + 1.767767\right) = (-0.7071067, 1.2374369); \\
[0, f(0)] &= (0,0) \text{ y también} \\
\left[\frac{1}{\sqrt{2}}, f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] &= (0.7071067, -1.2374369)
\end{aligned}$$

son de inflexión.
Con toda la información obtenida, conociendo que $f(x)$ y $f''(x)$ son impares y que $f'(x)$ es par, así como que las tres son continuas en todo $\mathbb{R}$, la gráfica de la función $f(x)$ queda de la siguiente manera



□

(3) A un depósito cilíndrico de 5 m de radio le está entrando agua a razón de 25 l por segundo. Calcular la rapidez a la que sube el nivel del agua. [Recordar que 1 l es igual a 1 dm^3.]

▼ Recordar también que 5 m = 50 dm, luego el volumen del agua es

$$V = \pi r^2 h = 50^2 \pi h \Rightarrow h = \frac{1}{50^2\pi} V.$$

Derivando con respecto al tiempo: $\dfrac{dh(t)}{dt} = \dfrac{1}{50^2\pi}\dfrac{dV}{dt}$, pero, como $\dfrac{dV}{dt} = 25$ dm^3/s, entonces:

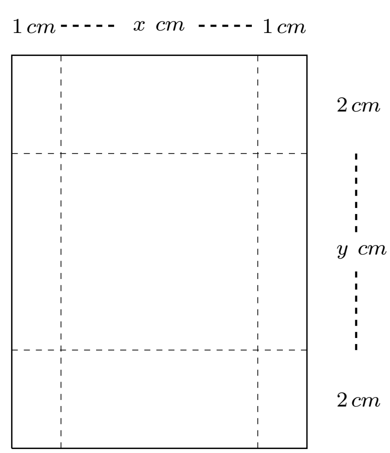
$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{50^2\pi} 25 \text{ dm/s} = \frac{1}{50 \times 25 \times \pi} \text{ dm/s} = \frac{1}{1\,250\pi} \text{ dm/s},$$

que es la rapidez a la que sube el agua.

□

(4) Una página ha de contener 30 cm^2 de texto. Los márgenes superior e inferior deben ser de 2 cm y los laterales de 1 cm. Hallar las dimensiones de la página que permiten ahorrar más papel.

▼ Hagamos un croquis con el tamaño de la página y los datos



Se sabe que $xy = 30$ cm^2.

Se quiere minimizar el área de la página de papel, esto es: $A = (x+2)(y+4)$.

Entonces, el área es una función de dos variables, x, y.

Pero como $xy = 30 \Rightarrow y = \dfrac{30}{x}$, sustituyendo este valor en la expresión para el área de la página, queda como función de la única variable x, a saber:

$$A(x) = (x+2)\left(\frac{30}{x} + 4\right) = 30 + 4x + \frac{60}{x} + 8 = 4x + 60x^{-1} + 38.$$

Para hallar los puntos críticos se deriva

$$A'(x) = 4 - \frac{60}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 = \frac{60}{x^2} \Leftrightarrow x^2 = 15 \Leftrightarrow |\,x\,| = \sqrt{15}.$$

Por lo que

$$x = \sqrt{15};$$
$$y = \frac{30}{\sqrt{15}} = \frac{30\sqrt{15}}{15} = 2\sqrt{15} = 2x.$$

Como $A''(x) = (4 - 60x^{-2})' = \dfrac{120}{x^3} > 0$, se trata, en efecto, de un mínimo.

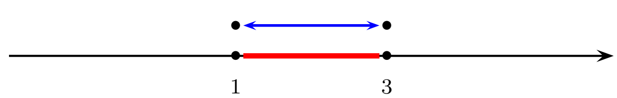
□

(5) Si se lanza una pelota hacia arriba desde la azotea de un edificio que tiene 25 m de altura con una velocidad inicial de 20 m/s, entonces la altura sobre el suelo t segundos después será $h(t) = 25 + 20t - 5t^2$. ¿Durante qué intervalo de tiempo estará la pelota por lo menos 40 m arriba del suelo?

▼ Hacemos $25 + 20t - 5t^2 \geq 40 \Leftrightarrow 5t^2 - 20t + 15 \leq 0$.
Como $5t^2 - 20t + 15 = 5(t^2 - 4t + 3) = 5(t-1)(t-3)$,
entonces $5t^2 - 20t + 15 = 0$ para $t = 1$ y también para $t = 3$.
Estos dos puntos dividen a la recta real en tres intervalos: $(-\infty, 1)$, $(1, 3)$ y $(3, +\infty)$.
Se quiere saber cuándo $5t^2 - 20t + 15 = 5(t-1)(t-3) \leq 0$. Es decir, cuando $(t-1)(t-3) \leq 0$.
Esto se puede saber considerando la tabla siguiente:

	Signo de		
Intervalos	$t-1$	$t-3$	$5t^2 - 20t + 15$
$t < 1\,(< 3)$	$-$	$-$	$+$
$1 < t < 3$	$+$	$-$	$-$
$(1 <)\,3 < t$	$+$	$+$	$+$

Luego entonces, $5t^2 - 20t + 15 \leq 0 \Leftrightarrow t \in [1, 3]$.



□

(6) La posición instantánea (en metros) de una partícula que se mueve en línea recta, está dada por $s(t) = t^2 - 8t + 18$, donde t se mide en segundos.

(a) Calcular las velocidades promedio en cada uno de los siguientes intervalos: [3,4], [3.5,4], [4,4.5] & [4,5]

▼ Calculamos:

$$[3,4] : \bar{v} = \frac{s(4) - s(3)}{4 - 3} = \frac{16 - 32 + 18 - (9 - 24 + 18)}{1} = -1;$$

$$[3.5,4] : \bar{v} = \frac{s(4) - s(3.5)}{4 - 3.5} = \frac{2 - (3.5^2 - 8 \cdot 3.5 + 18)}{0.5} = \frac{2 - (12.25 - 28 + 18)}{0.5} =$$

$$= \frac{2 - 2.25}{0.5} = \frac{-0.25}{0.5} = -0.5;$$

$$[4,4.5] : \bar{v} = \frac{s(4.5) - s(4)}{4.5 - 4} = \frac{4.5^2 - 8 \cdot 4.5 + 18 - 2}{0.5} = \frac{20.25 - 36 + 16}{0.5} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5;$$

$$[4,5] : \bar{v} = \frac{s(5) - s(4)}{5 - 4} = \frac{5^2 - 8 \cdot 5 + 18 - 2}{1} = \frac{25 - 40 + 16}{1} = 1.$$

□

(b) Utilizando la definición de derivada, calcular la velocidad instantánea de la partícula en $t = 4$ segundos.

▼ Por definición:

$$v(4) = \lim_{t \to 4} \frac{s(t) - s(4)}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{t^2 - 8t + 18 - 2}{t - 4} =$$

$$= \lim_{t \to 4} \frac{t^2 - 8t + 16}{t - 4} = \lim_{t \to 4} \frac{(t - 4)^2}{t - 4} =$$

$$= \lim_{t \to 4} (t - 4) = 0.$$

□

(7) Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4}$, determinar: dominio y raíces; intervalos de continuidad y tipo de discontinuidades; asíntotas verticales y horizontales; su gráfica.

▼ Dominio:

$$D_f = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x^2 - 4 \neq 0 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, (x + 2)(x - 2) \neq 0 \right\} = \mathbb{R} - \{ \pm 2 \}.$$

Raíces:
Para hallar las raíces se resuelve $x^2 + 2x - 8 = 0$; como $x^2 + 2x - 8 = (x + 4)(x - 2)$, se ve que $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ & $x = -4$, pero como $2 \notin D_f$, la única raíz de f es $x = -4$.

Continuidades:
La función por ser racional es continua en su dominio, es decir, $(-\infty, -2) \bigcup (-2, 2) \bigcup (2, +\infty)$.
Calculamos

$$\lim_{x \to -2^{\mp}} f(x) = \lim_{x \to -2^{\mp}} \frac{(x + 4)(x - 2)}{(x + 2)(x - 2)} = \lim_{x \to -2^{\mp}} \frac{x + 4}{x + 2} = \mp\infty.$$

Pues $\lim\limits_{x \to -2} (x + 4) = 2 > 0$ & $\lim\limits_{x \to -2^{\mp}} (x + 2) = 0\mp$.
Asíntotas:
La discontinuidad en $x = -2$ es esencial, de hecho es infinita, y entonces la recta $x = -2$ es una asíntota vertical.

Análogamente

$$\lim_{x \to 2^{\mp}} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x + 4}{x + 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2},$$

por lo que la discontinuidad en $x = 2$ es removible, pues si se define $f(2) = \dfrac{3}{2}$, $f(x)$ resultaría continua en $x = 2$.

Y ahora:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+2x-8}{x^2-4} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2\left(1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1+\dfrac{2}{x}-\dfrac{8}{x^2}}{1-\dfrac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1.$$

Entonces, la recta $y = 1$ es asíntota horizontal

La gráfica de la función $f(x)$ es: