

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
PRIMERA EVALUACIÓN PARCIAL E2200

- (1) Se lanza una pelota hacia arriba desde la orilla de una azotea de un edificio de 18 m de alto. La altura de la pelota está dada por

$$h(t) = 18 + 9t - 2t^2$$

el momento t medido en segundos. ¿Durante qué intervalo de tiempo la pelota estará, cuando menos, 25 m arriba del suelo?

- (2) Una caja rectangular sin tapa con volumen de 27 dm^3 , tiene su base 3 veces más larga que ancha. Expresa el área superficial de la caja en función de su ancho.
- (3) Si

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ x^2 - 2x - 8 & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

encontrar:

- (a) Un esbozo gráfico de la función
- (b) Dominio, rango, raíces, paridad y monotonía. Intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$
- (c) Un esbozo gráfico para la función $g(x) = -\frac{1}{2}f(x+1) - 3$
- (4) Si $f(x) = \sqrt{|3 - 4x| - 4}$, $g(x) = \sqrt{3 - 2x}$ & $h(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$.

encontrar:

- (a) El dominio de $f(x)$
- (b) Los dominios de $g(x)$ y de $h(x)$
- (c) $(h \circ g)(x)$ y su dominio

Respuestas

- (1) Se lanza una pelota hacia arriba desde la orilla de una azotea de un edificio de 18 m de alto. La altura de la pelota está dada por

$$h(t) = 18 + 9t - 2t^2$$

el momento t medido en segundos. ¿Durante qué intervalo de tiempo la pelota estará, cuando menos, 25 m arriba del suelo?

▼ Resolver el problema es equivalente a resolver

$$h(t) \geq 25 \Rightarrow 18 + 9t - 2t^2 \geq 25 \Rightarrow -2t^2 + 9t - 7 \geq 0 \Rightarrow 2t^2 - 9t + 7 \leq 0.$$

Vamos a encontrar las raíces de la cuadrática $2t^2 - 9t + 7 = 0$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{4} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{9 \pm 5}{4} = \begin{cases} \frac{7}{2} \\ 1. \end{cases}$$

Sabemos entonces que

$$2t^2 - 9t + 7 = 2\left(t - \frac{7}{2}\right)(t - 1).$$

Para saber dónde la cuadrática es negativa usamos la tabla

Intervalo	Signo de		
	$t - 1$	$t - \frac{7}{2}$	$(t - \frac{7}{2})(t - 1)$
$t < 1 (< \frac{7}{2})$	-	-	+
$1 < t < \frac{7}{2}$	+	-	-
$t > \frac{7}{2} (> 1)$	+	+	+

La solución es

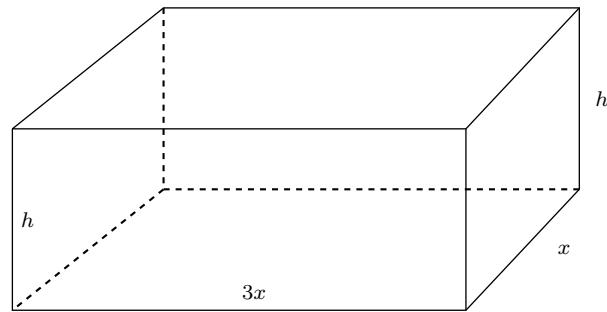
$$t \in \left[1, \frac{7}{2}\right].$$



□

- (2) Una caja rectangular sin tapa con volumen de 27 dm^3 , tiene su base 3 veces más larga que ancha. Exprese el área superficial de la caja en función de su ancho.

▼ Usamos el siguiente dibujo.



El volumen de la caja es

$$(i) \quad V = 3x^2h = 27.$$

El área lateral de la caja es

$$A_L = 2 \times xh + 2 \times 3xh = 8xh.$$

El área de la base de la caja es

$$A_B = 3x^2.$$

Y ahora ya el área total:

$$(ii) \quad A_T = A_B + A_L = 3x^2 + 8xh.$$

Despejamos h de (i)

$$h = \frac{27}{3x^2} = \frac{9}{x^2}.$$

Sustituimos en (ii)

$$A_T = 3x^2 + 8x \frac{9}{x^2} = 3x^2 + \frac{72}{x}.$$

Ésta es la expresión solicitada. □

(3) Si

$$f(x) = \begin{cases} 1 - 3x & \text{si } -3 \leq x < -2 \\ x^2 - 2x - 8 & \text{si } -1 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

encontrar:

(a) Un esbozo gráfico de la función

▼ La gráfica de la función consta de dos partes:

(i) Una recta de pendiente $m = -3$ y ordenada en el origen $b = 1$ restringida al intervalo $[-3, -2)$.

Evaluamos esta recta en los extremos del intervalo para tener puntos de referencia:

x	$1 - 3x$
-3	10
-2	7

(ii) La parábola $y = x^2 - 2x - 8$ restringida al intervalo $[-1, 5]$.

Puesto que

$$x^2 - 2x - 8 = x^2 - 2x + 1 - 1 - 8 = (x - 1)^2 - 9,$$

vemos que tenemos una parábola con vértice $(1, -9)$ y que se obtiene a partir de $y = x^2$ desplazándola 1 unidad a la derecha y 9 unidades hacia abajo.

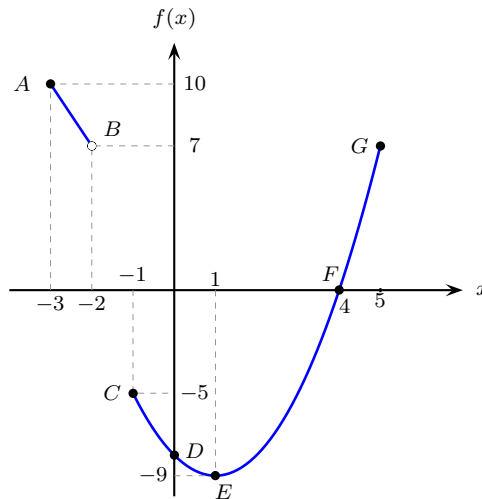
Para obtener más información sobre la cuadrática calculamos los ceros o raíces:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2. \end{cases}$$

Evaluamos la cuadrática en algunos puntos

x	$x^2 - 2x - 8$
0	-8
-1	-5
5	7

Con la información anterior hacemos un esbozo de la gráfica



□

- (b) Dominio, rango, raíces, paridad y monotonía. Intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$

▼ Dominio: $D_f = [-3, -2) \cup [-1, 5]$.

Rango: $R_f = [-9, 10]$.

Raíces: $x = 4$.

Paridad: la función no es par ni impar.

La función decrece si $x \in [-3, 2)$ y en $[-1, 1]$.

La función crece si $x \in [1, 5]$.

$f(x) > 0$ si $x \in [-3, -2) \cup (4, 5]$.

$f(x) < 0$ si $x \in [-1, 4)$.

□

- (c) Un esbozo gráfico para la función $g(x) = -\frac{1}{2}f(x+1) - 3$

▼ Cada valor de la nueva gráfica se obtiene de la anterior desplazándola una unidad a la izquierda, multiplicando el valor de la función por $-\frac{1}{2}$ y bajándola 3 unidades.

Vamos a obtener los valores de los puntos elegidos:

$$D_g = [-4, -3) \cup [-2, 4].$$

y los puntos $x = -3, -2, -1, 0, 1, 4$ y 5 se transforman respectivamente en

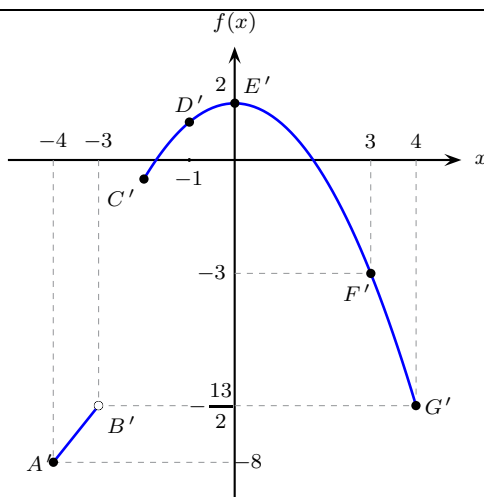
$x = -4, -3, -2, -1, 0, 3$ y 4 y:

$$\begin{aligned}
 g(-4) &= -\frac{1}{2}f(-4+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(-3) - 3 = -\frac{1}{2}10 - 3 = -5 - 3 = -8; \\
 g(-3^-) &= -\frac{1}{2}f(-3^-+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(-2^-) - 3 = -\frac{1}{2}7 - 3 = -\frac{13}{2}; \\
 g(-2) &= -\frac{1}{2}f(-2+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(-1) - 3 = -\frac{1}{2}(-5) - 3 = \frac{5}{2} - 3 = -\frac{1}{2}; \\
 g(-1) &= -\frac{1}{2}f(-1+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(0) - 3 = -\frac{1}{2}(-8) - 3 = 4 - 3 = 1; \\
 g(0) &= -\frac{1}{2}f(0+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(1) - 3 = -\frac{1}{2}(-9) - 3 = \frac{9}{2} - 3 = \frac{3}{2}; \\
 g(3) &= -\frac{1}{2}f(3+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(4) - 3 = -\frac{1}{2}0 - 3 = 0 - 3 = -3; \\
 g(4) &= -\frac{1}{2}f(4+1) - 3 = -\frac{1}{2}f(5) - 3 = -\frac{1}{2}7 - 3 = -\frac{7}{2} - 3 = -\frac{13}{2}.
 \end{aligned}$$

Por lo que los puntos $A(-3, 10)$, $B(-2, 7)$, $C(-1, -5)$, $D(0, -8)$, $E(1, -9)$, $F(4, 0)$, $G(5, 7)$ se transforman también respectivamente en $A'(-4, -8)$, $B'\left(-3, -\frac{13}{2}\right)$, $C'\left(-2, -\frac{1}{2}\right)$, $D'(-1, 1)$, $E'\left(0, \frac{3}{2}\right)$, $F'(3, -3)$, $G'\left(4, -\frac{13}{2}\right)$.

$$\begin{aligned}
 A(-3, 10) &\rightarrow (-4, 10) \rightarrow (-4, -5) \rightarrow A'(-4, -8); \\
 B(-2, 7) &\rightarrow (-3, 7) \rightarrow \left(-3, -\frac{7}{2}\right) \rightarrow B'\left(-3, -\frac{13}{2}\right); \\
 C(-1, -5) &\rightarrow (-2, -5) \rightarrow \left(-2, \frac{5}{2}\right) \rightarrow C'\left(-2, -\frac{1}{2}\right); \\
 D(0, -8) &\rightarrow (-1, -8) \rightarrow (-1, 4) \rightarrow D'(-1, 1); \\
 E(1, -9) &\rightarrow (0, -9) \rightarrow \left(0, \frac{9}{2}\right) \rightarrow E'\left(0, \frac{3}{2}\right); \\
 F(4, 0) &\rightarrow (3, 0) \rightarrow (3, 0) \rightarrow F'(3, -3); \\
 G(5, 7) &\rightarrow (4, 7) \rightarrow \left(4, -\frac{7}{2}\right) \rightarrow G'\left(4, -\frac{13}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Con la información anterior, hacemos el esbozo de la gráfica:



□

(4) ▼

(a) La función $f(x)$ está definida siempre y cuando el radicando sea no negativo

$$|3 - 4x| - 4 \geq 0 \Rightarrow |3 - 4x| \geq 4.$$

Esta última desigualdad es equivalente a las siguientes (que se cumple una o bien la otra)

$$(i) 3 - 4x \geq 4 \Rightarrow -1 \geq 4x \Rightarrow -\frac{1}{4} \geq x$$

o sea,

$$x \in \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right].$$

$$(ii) \text{ O bien } 3 - 4x \leq -4 \Rightarrow 7 \leq 4x \Rightarrow \frac{7}{4} \leq x$$

o sea,

$$x \in \left[\frac{7}{4}, +\infty\right).$$

Por lo tanto,

$$D_f = \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right] \cup \left[\frac{7}{4}, +\infty\right).$$

(b) De igual manera $g(x)$ está definida si

$$3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 3 \geq 2x \Rightarrow \frac{3}{2} \geq x;$$

por lo tanto

$$D_g = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right].$$

Se ve fácilmente que $D_h = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ ya que $x = -2$ y $x = 2$ son los ceros de $x^2 - 4$.

(c) Calculamos:

$$(h \circ g)(x) = h[g(x)] = h(\sqrt{3 - 2x}) = \frac{4}{(\sqrt{3 - 2x})^2 - 4} = \frac{4}{-1 - 2x} = -\frac{4}{2x + 1};$$

 $x \in D_{h \circ g}$ si cumple dos condiciones simultáneamente:

$$(i) x \in D_g \Rightarrow x \in \left(-\infty, \frac{3}{2}\right].$$

(ii) Y $g(x) \in D_h \Rightarrow \sqrt{3-2x} \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

Nos preguntamos para qué valores de x la raíz cuadrada es igual a -2 y a 2 .
Nunca es igual a -2 ya que es no negativa.

$$\sqrt{3-2x} = 2 \Rightarrow 3-2x = 4 \Rightarrow -2x = 1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}.$$

Tenemos entonces que

$$D_{hog} = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] - \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

□