CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I
TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E0600
TRIMESTRE 00-P

(1) Obtener la ecuación de la tangente a la curva

$$\frac{8}{x^2+y^2} + xy^3 - x^4 = 1$$

en el punto $(2, 2)$.

(2) Se requiere construir un recipiente cilíndrico de base circular, con tapa y con capacidad de 6 m^3. Calcular las dimensiones que debe tener, para que se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

(3) Una partícula se mueve en línea recta y su posición instantánea está dada por la función

$$s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t$$

Donde $t \geq 0$ se mide en segundos y s en metros.

(a) Calcular la velocidad de la partícula en el instante t.
(b) ¿Cuál es la velocidad a los de 3 segundos?
(c) ¿Cuándo la partícula está en reposo?
(d) ¿Cuándo la partícula se mueve hacia adelante?
(e) Calcular la distancia total recorrida durante los primeros 8 segundos
(f) Calcular la aceleración en el instante t y a los 3 segundos
(g) ¿Cuándo se acelera y cuándo se desacelera la partícula?
(h) Trazar las gráficas de las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 8$

(4) Bosquejar la gráfica de una función continua $f(x)$ que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{rl}
f(-4) = 0; & f'(-4) = -1; \\
f(-1) = -3; & f'(-1) = 0; \\
f(2) = 5; & f'(2) = 1; \\
f(0) = 0; & f'(0) \text{ no existe}; \\
\displaystyle\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty; & \\
f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-\infty, -1); & f'(x) > 0 \text{ si } x \in [-1, +\infty) - \{0\}; \\
f''(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty, 0); & f''(x) < 0 \text{ si } x \in (0, +\infty).
\end{array}$$

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

Respuestas

(1) Obtener la ecuación de la tangente a la curva

$$\frac{8}{x^2+y^2}+xy^3-x^4=1$$

en el punto $(2,2)$.

▼ Efectivamente el punto $(2,2)$ pertenece a la curva pues sus coordenadas $x=y=2$ satisfacen la ecuación

$$\frac{8}{2^2+2^2}+2(2)^3-2^4=\frac{8}{4+4}+2\times 8-16=\frac{8}{8}+16-16=1.$$

Si suponemos que y es función de x entonces podemos calcular su derivada mediante derivación implícita

$$\frac{d}{dx}[8(x^2+y^2)^{-1}+xy^3-x^4]=\frac{d}{dx}1;$$
$$8(-1)(x^2+y^2)^{-2}\frac{d}{dx}(x^2+y^2)+\frac{d}{dx}(xy^3)-\frac{d}{dx}x^4=0$$

obtenemos

$$\frac{-8(2x+2yy')}{(x^2+y^2)^2}+y^3+x\times 3y^2y'-4x^3=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow -16x-16yy'+(x^2+y^2)^2(y^3+3xy^2y'-4x^3)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'[-16y+3xy^2(x^2+y^2)^2]=16x-(x^2+y^2)^2(y^3-4x^3)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'=\frac{16x-(x^2+y^2)^2(y^3-4x^3)}{-16y+3xy^2(x^2+y^2)^2}\,.$$

De aquí que la pendiente de la recta tangente en el punto $(2,2)$ sea

$$y'(2,2)=\frac{32-(4+4)^2(8-32)}{-32+24(4+4)^2}=\frac{32-64(-24)}{-32+24(64)}=\frac{32+1536}{-32+1536}=\frac{1568}{1504}=\frac{49}{47}\,.$$

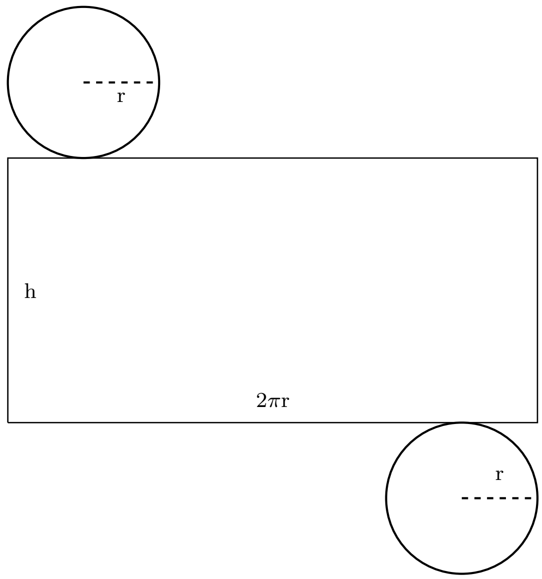
Luego la ecuación de la recta tangente es

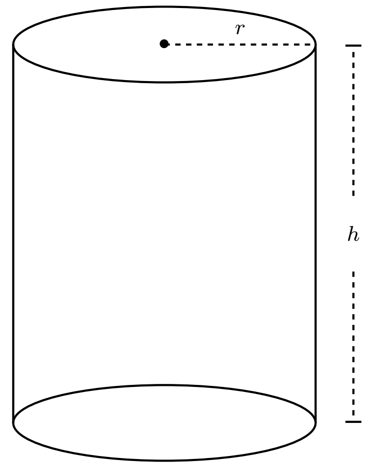
$$y-2=\frac{49}{47}(x-2)\Rightarrow y=\frac{49}{47}x+2-\frac{98}{47}\Rightarrow y=\frac{49}{47}x+\frac{94-98}{47}\Rightarrow y=\frac{49}{47}x-\frac{4}{47}\,.$$

□

(2) Se requiere construir un recipiente cilíndrico de base circular, con tapa y con capacidad de $6\ \text{m}^3$. Calcular las dimensiones que debe tener, para que se requiera la mínima cantidad de material en su construcción.

▼ Usamos las figuras





Queremos minimizar el área total del cilindro, es decir

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2.$$

Ésta es una función de dos variables: el radio de la base r y la altura del cilindro h, pero están relacionadas pues el volumen del cilindro V es igual a $\pi r^2 h$, el cual tiene que ser 6 m^3, esto es

$\pi r^2 h = 6$, de donde $h = \dfrac{6}{\pi r^2}$ y, sustituyendo este valor en la fórmula del área, la podemos escribir como función de una sola variable, r

$$A(r) = 2\pi r \frac{6}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{12}{r} + 2\pi r^2.$$

Su dominio es $(0, \infty)$, es derivable y sus puntos críticos se obtienen cuando

$$A'(r) = \frac{-12}{r^2} + 4\pi r = 0 \Rightarrow \frac{12}{r^2} = 4\pi r \Rightarrow r^3 = \frac{12}{4\pi} = \frac{3}{\pi} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} = \left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Para este valor

$$h = \frac{6}{\pi r^2} = \frac{6}{\pi\left(\frac{3}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{6}{\pi^{\frac{1}{3}} 3^{\frac{2}{3}}} = \frac{6 \times 3^{\frac{1}{3}}}{\pi^{\frac{1}{3}} \times 3} = 2\sqrt[3]{\frac{3}{\pi}} = 2r.$$

Como

$$A''(r) = \frac{2 \times 12}{r^3} + 4\pi > 0,$$

el valor de $r = \sqrt[3]{\dfrac{3}{\pi}}$ es el que genera el área mínima.

Note lo poco frecuente que es encontrar en el mercado botes cilíndricos cuya altura sea igual al diámetro de la base.

□

(3) Una partícula se mueve en línea recta y su posición instantánea está dada por la función

$$s = f(t) = t^3 - 12t^2 + 36t,$$

donde $t \geq 0$ se mide en segundos y s en metros.

(a) Calcular la velocidad de la partícula en el instante t

▼
$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt} = \frac{d(t^3 - 12t^2 + 36t)}{dt} = 3t^2 - 24t + 36 \text{ m/s}.$$
□

(b) ¿Cuál es la velocidad a los 3 segundos?

▼
$$v(3) = 3 \times 3^2 - 24 \times 3 + 36 = 27 - 72 + 36 = -9 \text{ m/s}.$$
□

(c) ¿Cuándo la partícula está en reposo?

▼ Cuando $v(t) = 0$, es decir, cuando
$$v(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t^2 - 8t + 12) = 3(t - 2)(t - 6) = 0;$$
esto es, a los 2 y a los 6 segundos.

□

(d) ¿Cuándo la partícula se mueve hacia adelante?

▼ Cuando
$$v(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t - 2)(t - 6) > 0.$$
Es decir,

Intervalo	$t-2$	$t-6$	$v(t)$
$0 \le t < 2$ (< 6)	$-$	$-$	$+$
$2 < t < 6$	$+$	$-$	$-$
$t > 6$ (> 2)	$+$	$+$	$+$

cuando $t \in [0, 2) \bigcup (6, \infty)$.

□

(e) Calcular la distancia total recorrida durante los primeros 8 segundos

▼ Sabemos que
$$s = f(t) = t(t^2 - 12t + 36) = t(t - 6)^2.$$
Luego
$$s(2) = f(2) = 2(2 - 6)^2 = 2 \times 16 = 32 \text{ m}.$$
Por lo que cuando $t = 2$ la partícula ha recorrido 32 m a partir del origen (observe que $s(0) = f(0) = 0$).
$$s(6) = f(6) = 6(6 - 6)^2 = 0.$$
Por lo que entre los 2 y los 6 segundos, la partícula recorre otros 32 m y, por último
$$s(8) = 8(8 - 6)^2 = 8 \times 4 = 32 \text{ m}.$$
Por lo que entre los 6 y los 8 segundos, la partícula recorre otros 32 m, por lo que en total recorrió $32 \times 3 = 96$ m.

□

(f) Calcular la aceleración en el instante t y a los 3 segundos

▼
$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d(3t^2 - 24t + 36)}{dt} = 6t - 24 \text{ m/s}^2 = 6(t - 4) \text{ m/s}^2.$$
Por lo que
$$a(3) = 6(3 - 4) = -6 \text{ m/s}^2.$$
□

(g) ¿Cuándo se acelera y cuándo se desacelera la partícula?

(i) ▼ La partícula se acelera cuando $a(t) > 0$ y cuando $v(t) > 0$, es decir, cuando $t \in (4, +\infty)$ y cuando $t \in (0, 2) \bigcup (6, +\infty)$, respectivamente. O sea cuando $t \in (6, +\infty)$.
La partícula también se acelera cuando $a(t) < 0$ y cuando $v(t) < 0$, es decir, cuando $t \in (0, 4)$ y cuando $t \in (2, 6)$, respectivamente. O sea cuando $t \in (2, 4)$.
Concluimos entonces que se acelera para $t \in (2, 4) \bigcup (6, +\infty)$.

□

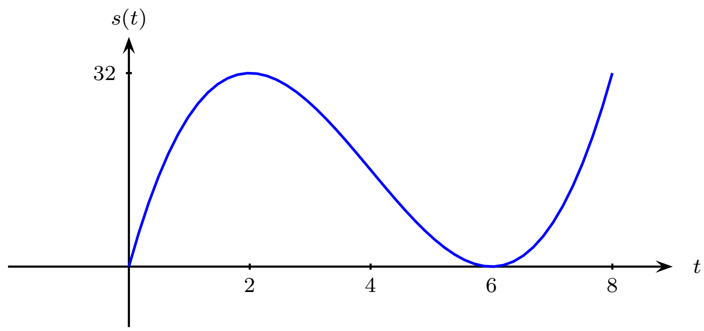
(ii) ▼ La partícula se desacelera para $t \in (0, 2) \bigcup (4, 6)$.

□

(h) Trazar las gráficas de las funciones de posición, velocidad y aceleración para $0 \leq t \leq 8$

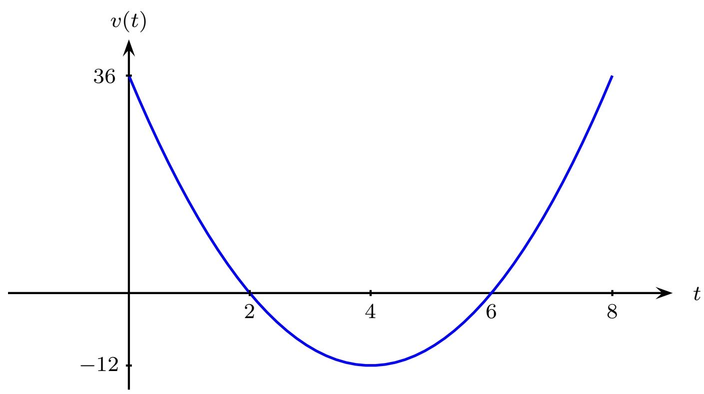
▼ En base a la información obtenida, además de que $D_f = \mathbb{R}$, en $(2, 32)$ $s(t)$ tiene un máximo y en $(6, 0)$ un mínimo; es cóncava hacia arriba en $(4, +\infty)$ y hacia abajo en $(0, 4)$; además $(4, 16)$ es un punto de inflexión, tenemos que:

La gráfica de $s(t)$ es:

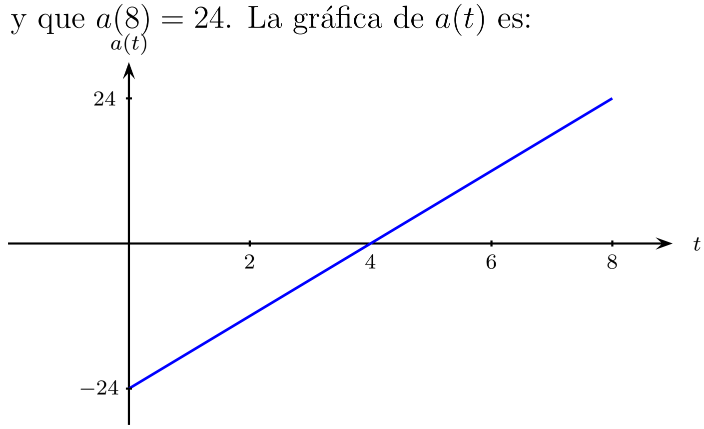


Notemos que $v(t) = 3t^2 - 24t + 36 = 3(t^2 - 8t + 12) = 3[(t^2 - 8t + 16) - 4] = 3[(t - 4)^2 - 4]$, luego la gráfica de $v(t)$ es una parábola con vértice en $(4, -12)$, $v(0) = 36$ y también $v(8) = 36$, entonces:

La gráfica de $v(t)$ es:



Sabemos que $a(0) = -24$ y que $a(8) = 24$. La gráfica de $a(t)$ es:

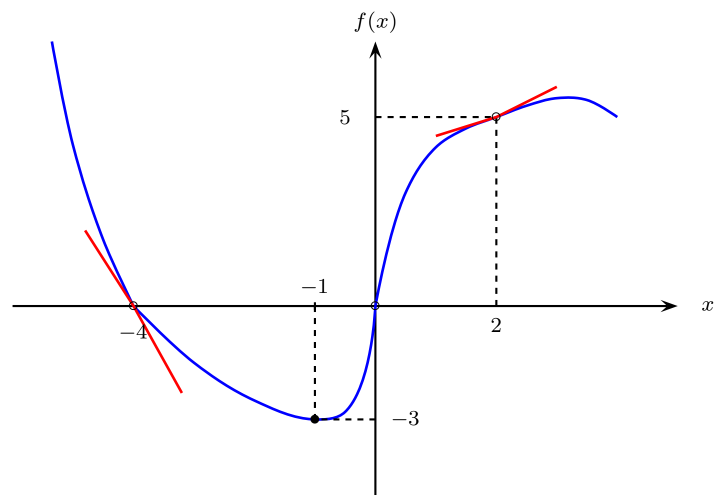


□

(4) Bosquejar la gráfica de una función continua $f(x)$ que satisfaga todas las condiciones siguientes:

$$\begin{array}{rl}
f(-4) = 0; & f'(-4) = -1; \\
f(-1) = -3; & f'(-1) = 0; \\
f(2) = 5; & f'(2) = 1; \\
f(0) = 0; & f'(0) \text{ no existe;} \\
\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty; & \\
f'(x) < 0 \text{ si } x \in (-\infty, -1); & f'(x) > 0 \text{ si } x \in [-1, +\infty) - \{0\}; \\
f''(x) > 0 \text{ si } x \in (-\infty, 0); & f''(x) < 0 \text{ si } x \in (0, +\infty).
\end{array}$$

▼ Un gráfica posible de la función $f(x)$ es:



□