**CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I**
**TERCERA EVALUACIÓN PARCIAL E0800**

(1) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva

$$5x^2y + 8x^4y^2 - 3(y^5 + x^3)^2 = 1$$

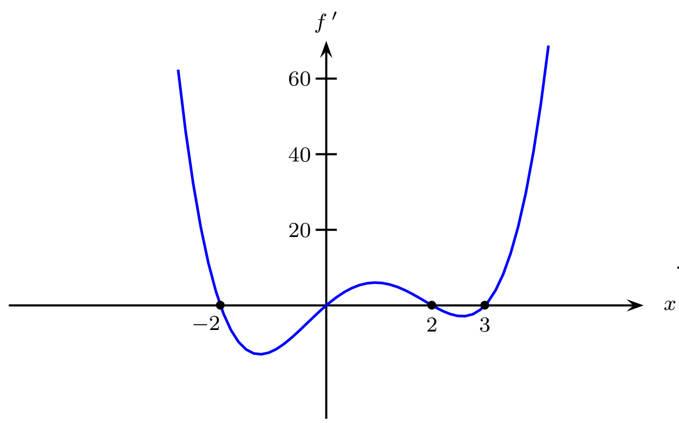
en el punto $(1, 1)$.

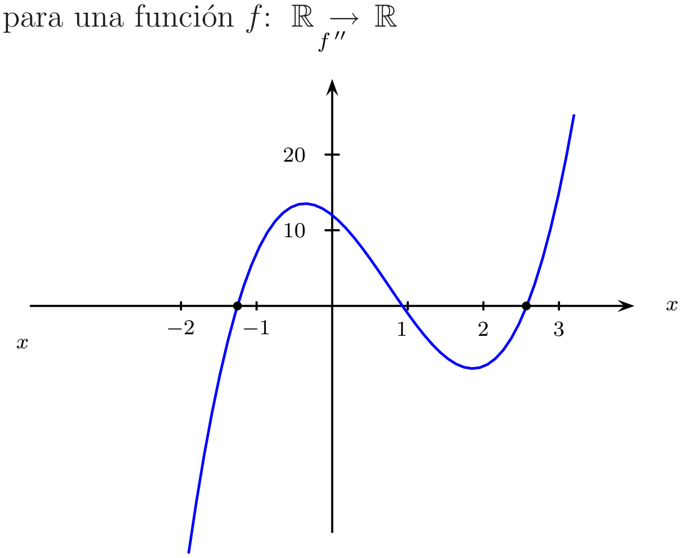
(2) Cuando se expande aire a temperatura constante, su presión y su volumen, satisfacen

$$PV^{1.4} = C$$

donde $C$ es una constante. Si en un momento determinado el volumen es de 400 cm$^3$ y la presión es de 80 KPa, disminuyendo ésta a razón de 10 KPa/min, ¿con qué razón aumenta el volumen en ese instante?

(3) Supóngase que las siguientes son las gráficas de $f\,'$ y $f\,''$, para una función $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$




A partir de las gráficas de $f\,'$ y $f\,''$, determine dónde es creciente y dónde es decreciente $f$; sus intervalos de concavidad; máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.

(4) Dos barcos salen al mismo tiempo; uno de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 20 km/h. El otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 km al oeste, a 10 km/h. ¿En qué momento se encuentran más cercanos estos dos navíos?

(5) Sea

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}\,.$$

Determina los intervalos de monotonía y de concavidad de $f$; máximos y mínimos locales y puntos de inflexión.

Usando esta información, esboza la gráfica de $f$.

canek.azc.uam.mx: 2/ 3/ 2006.

# Respuestas

(1) Determine la ecuación de la recta tangente a la curva

$$5x^2y + 8x^4y^2 - 3(y^5 + x^3)^2 = 1$$

en el punto $(1, 1)$.

▼ El punto estará sobre la curva si sus coordenadas $x = 1$ & $y = 1$ satisfacen la ecuación de la curva. Veámoslo; ponemos 1 en lugar de $x$ & $y$, con lo cual tenemos:

$$5(1)^2 \times 1 + 8(1)^4(1)^2 - 3[(1)^5 + (1)^3]^2 = 5 + 8 - 3 \times 2^2 = 13 - 3 \times 4 = 13 - 12 = 1$$

y verificamos que el punto está sobre la curva, efectivamente.

Hallemos ahora la pendiente de la tangente derivando implícitamente con respecto a $x$

$$10xy + 5x^2y' + 32x^3y^2 + 16x^4yy' - 6(y^5 + x^3)(5y^4y' + 3x^2) = 0.$$

Trasponiendo términos y factorizando $y'$:

$$y'(5x^2 + 16x^4y - 30y^9 - 30x^3y^4) = -10xy - 32x^3y^2 + 18x^2y^5 + 18x^5;$$

despejando $y'$

$$y' = \frac{-10xy - 32x^3y^2 + 18x^2y^5 + 18x^5}{5x^2 + 16x^4y - 30y^9 - 30x^3y^4};$$

y ahora en el punto $(1, 1)$:

$$y'(1, 1) = \frac{-10 - 32 + 18 + 18}{5 + 16 - 30 - 30} = \frac{-6}{-39} = \frac{2}{13}$$

es la pendiente de la recta tangente; su ecuación entonces es:

$$y - 1 = \frac{2}{13}(x - 1) \Rightarrow y = \frac{2}{13}x - \frac{2}{13} + 1 \Rightarrow y = \frac{2}{13}x + \frac{11}{13}.$$

□

(2) Cuando se expande aire a temperatura constante, su presión y su volumen, satisfacen

$$PV^{1.4} = C$$

donde $C$ es una constante. Si en un momento determinado el volumen es de 400 cm$^3$ y la presión es de 80 KPa, disminuyendo ésta a razón de 10 KPa/min, ¿con qué razón aumenta el volumen en ese instante?

▼ En la ecuación $PV^{1.4} = C$ se tiene que $P$ & $V$ son funciones de $t$. Derivamos entonces implícitamente respecto a $t$:

$$\frac{d}{dt}(PV^{1.4}) = \frac{d}{dt}C \Rightarrow P\frac{d}{dt}V^{1.4} + V^{1.4}\frac{d}{dt}P = 0 \Rightarrow P(1.4)V^{0.4}\frac{dV}{dt} + V^{1.4}\frac{dP}{dt} = 0;$$

despejamos $\dfrac{dV}{dt}$:

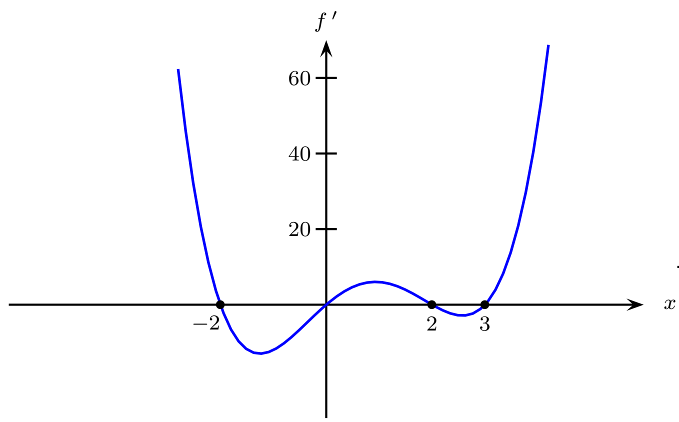
$$1.4PV^{0.4}\frac{dV}{dt} = -V^{1.4}\frac{dP}{dt} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{V^{1.4}\dfrac{dP}{dt}}{1.4PV^{0.4}} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{V\dfrac{dP}{dt}}{1.4P};$$

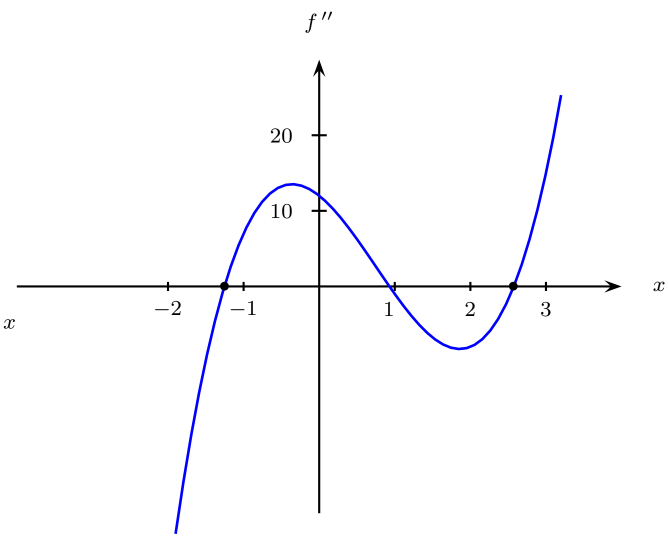
sustituimos $V = 400$ cm$^3$, $P = 80$ KPa y $\dfrac{dP}{dt} = -10$ KPa/min y obtenemos

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{(400 \text{ cm}^3)(-10 \text{ KPa/min})}{1.4(80 \text{ KPa})} = 35.7 \text{ cm}^3/\text{min}.$$

Luego entonces (ya que $\dfrac{dV}{dt} > 0$), el volumen aumenta 35.7 cm$^3$/min. $\square$

(3) Supóngase que las siguientes son las gráficas de $f'$ y $f''$, para una función $f\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



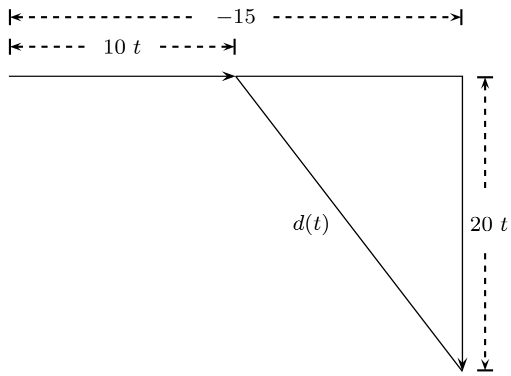




A partir de las gráficas de $f'$ y $f''$, determine dónde es creciente y dónde es decreciente $f$; sus intervalos de concavidad; máximos y mínimos relativos y puntos de inflexión.

▼ Intervalos de monotonía:
$f$ es creciente en $(-\infty, -2)$, $(0, 2)$ y $(3, +\infty)$. Es decir $f'(x) > 0$;
$f$ es decreciente $(-2, 0)$ y $(2, 3)$. Es decir, $f'(x) < 0$.
Intervalos de concavidad:
$f$ es cóncava hacia arriba en $\left(-\dfrac{3}{2}, 1\right)$ y en $\left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$. Es decir, $f''(x) > 0$.
$f$ es cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right)$ y en $\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$. Es decir, $f''(x) < 0$.
Máximos y mínimos:
Tiene extremos $f$ en $-2$, $0$, $2$ y en $3$. En $-2$ y en $2$ hay máximos relativos; en $0$ y en $3$ hay mínimos relativos.
Puntos de inflexión:
Hay puntos de inflexión en $-\dfrac{3}{2}$, $1$ y $\dfrac{5}{2}$, pues $f''(x) = 0$. $\square$

(4) Dos barcos salen al mismo tiempo; uno de un muelle, con dirección sur y con velocidad de 20 km/h. El otro parte hacia el muelle desde un punto que se encuentra a 15 km al oeste, a 10 km/h. ¿En qué momento se encuentran más cercanos estos dos navíos?

▼ Usamos la siguiente figura:




La distancia entre ambos barcos es

$$d(t) = \sqrt{(-15+10t)^2 + (-20t)^2} = \sqrt{500t^2 - 300t + 225}\,.$$

de la cual queremos hallar su mínimo, por lo que buscamos sus puntos críticos

$$d'(t) = \frac{1000t - 300}{2\sqrt{500t^2 - 300t + 225}} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{10}h$$

en donde $d(t)$ pasa de ser decreciente a ser creciente, luego es el mínimo, y es

$$d\left(\frac{3}{10}\right) = \sqrt{144+36} = \sqrt{180} \approx 13.416408 \text{ km.}$$

$\square$

(5) Sea

$$f(x) = \sqrt[5]{x^2} - \sqrt[3]{x^5}\,.$$

Determina los intervalos de monotonía y de concavidad de $f$; máximos y mínimos locales y puntos de inflexión.

Usando esta información, esboza la gráfica de $f$.

▼ Calculemos la derivada de $f(x) = x^{\frac{2}{5}} - x^{\frac{5}{3}}$:

$$f'(x) = \frac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} - \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \frac{6 - 25x^{\frac{3}{5}+\frac{2}{3}}}{15x^{\frac{3}{5}}} = \frac{6 - 25x^{\frac{19}{15}}}{15x^{\frac{3}{5}}} \text{ si } x \neq 0.$$

Para $x > 0$, $f(x)$ es creciente si $6 - 25x^{\frac{19}{15}} > 0 \Leftrightarrow x^{\frac{19}{15}} < \dfrac{6}{25} \Leftrightarrow x < \left(\dfrac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}}$.

Luego $f(x)$ es creciente en $\left(0, \left(\dfrac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}}\right)$.

Y decreciente en $\left(\left(\dfrac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}}, +\infty\right)$.

Análogamente para $x < 0$:

$$f(x) \text{ es creciente si } 6 - 25x^{\frac{19}{15}} < 0 \Leftrightarrow x^{\frac{19}{15}} > \frac{6}{25} \Leftrightarrow x > \left(\frac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}}.$$

Pero como $\left(\dfrac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}} > 0$, $f(x)$ nunca es creciente para $x < 0$, luego es decreciente en $(-\infty, 0)$.

Calculemos ahora la segunda derivada de $f(x)$:

$$f''(x) = \frac{-25\dfrac{19}{15}x^{\frac{4}{15}} \times 15x^{\frac{3}{5}} - 15\dfrac{3}{5}x^{-\frac{2}{5}}\left(6 - 25x^{\frac{19}{15}}\right)}{225x^{\frac{6}{5}}} = \frac{-475x^{\frac{13}{15}} - 54x^{-\frac{2}{5}} + 225x^{\frac{13}{15}}}{225x^{\frac{6}{5}}} =$$
$$= \frac{-475x^{\frac{19}{15}} - 54 + 225x^{\frac{19}{15}}}{225x^{\frac{8}{5}}} = \frac{-250x^{\frac{19}{15}} - 54}{225x^{\frac{8}{5}}}.$$

Como $x^{\frac{8}{5}} > 0$, siempre que $x \neq 0$, el signo de la segunda derivada nos lo da el numerador $-250\,x^{\frac{19}{15}} - 54$. Luego $f(x)$ es cóncava hacia arriba si

$$-250\,x^{\frac{19}{15}} - 54 > 0 \Leftrightarrow 250\,x^{\frac{19}{15}} < -54 \Leftrightarrow x^{\frac{19}{15}} < -\frac{54}{250} \Leftrightarrow x < -\left(\frac{54}{250}\right)^{\frac{15}{19}} = -\left(\frac{27}{125}\right)^{\frac{15}{19}}.$$

Es decir si $x \in \left(-\infty, -\left(\dfrac{27}{125}\right)^{\frac{15}{19}}\right)$.

Y es convexa si $x \in \left(-\left(\dfrac{27}{125}\right)^{\frac{15}{19}}, 0\right)$ y $x \in (0, +\infty)$.

Calculemos los puntos críticos, además de $x = 0$, donde $f(x)$ tiene un mínimo relativo, el origen $(0, 0)$ pues ahí la función pasa de ser decreciente a ser creciente:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6 - 25x^{\frac{19}{15}} = 0 \Leftrightarrow 6 = 25x^{\frac{19}{15}} \Leftrightarrow x^{\frac{19}{15}} = \frac{6}{25} \Leftrightarrow x = \left(\frac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}}.$$

donde $f(x)$ tiene un máximo relativo pues ahí la función pasa de ser creciente a ser decreciente en el punto

$$\left[\left(\frac{6}{25}\right)^{\frac{15}{19}}, \left(\frac{6}{25}\right)^{\frac{6}{19}} - \left(\frac{6}{25}\right)^{\frac{25}{19}}\right].$$

Los puntos de inflexión se obtienen donde la segunda derivada cambia de signo; es decir, calculemos cuando $f''(x) = 0$

$$-250x^{\frac{19}{15}} - 54 = 0 \Leftrightarrow 250x^{\frac{19}{15}} = -54 \Leftrightarrow x^{\frac{19}{15}} = -\frac{54}{250} \Leftrightarrow x = -\left(\frac{54}{250}\right)^{\frac{15}{19}}.$$

Donde $f(x)$ tiene un punto de inflexión, pues en el punto $\left[-\left(\dfrac{27}{125}\right)^{\frac{15}{19}}, \left(\dfrac{27}{125}\right)^{\frac{6}{19}} + \left(\dfrac{27}{125}\right)^{\frac{25}{19}}\right)$ la curva gráfica de $f(x)$ pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo o convexa.

Tenemos que:

$f(x)$ es creciente en $(0, 0.32411)$;

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, 0)$ y en $(0.32411, +\infty)$;

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -0.298242)$;

$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-0.298242, 0) \bigcup (0, +\infty)$;

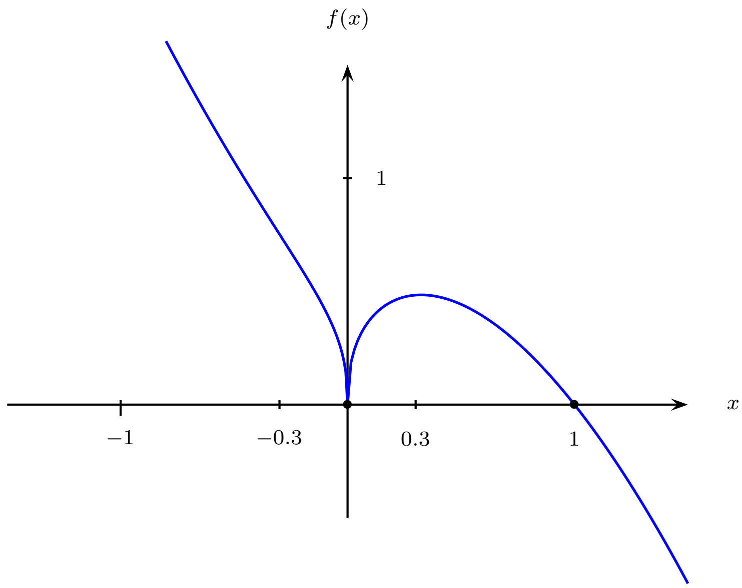
$(0, 0)$ es un mínimo local;

$(0.32411, 0.1529285)$ es un máximo local;

$(-0.298242, 0.7494817)$ es punto de inflexión;

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^{\frac{2}{5}} = x^{\frac{5}{3}} \Leftrightarrow x^6 = x^{25} \Leftrightarrow x^6(x^{19} - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ y } x^{19} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \;\&\; 1.$$

Dibujamos ahora la gráfica de la función $f(x)$:




$\square$