CAPÍTULO

5

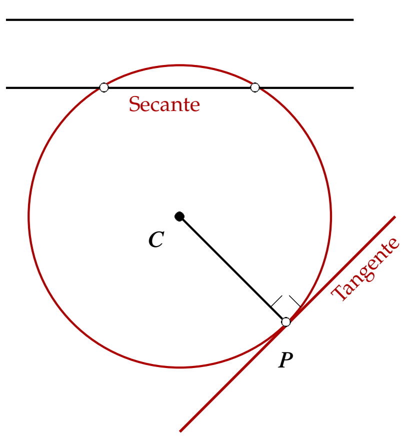
La derivada

[1]

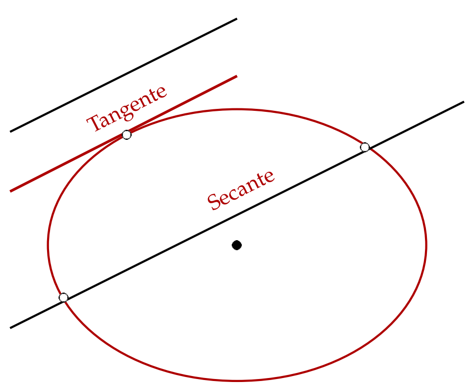
5.1 La recta tangente

Los griegos sabían que una recta en el mismo plano que una cónica (en el caso de la parábola o de la hipérbola, una recta no paralela a alguno de sus ejes) o la cortaba en dos puntos o la tocaba en un punto, o no la cortaba. A la recta que tocaba la cónica en un punto la llamaban tangente a la cónica en dicho punto.

Por ejemplo, en el caso de la circunferencia sabían también que el radio que pasa por el punto de contacto es perpendicular a tal tangente, por lo que no tenían problema para trazar la tangente a una circunferencia en cualquiera de sus puntos.

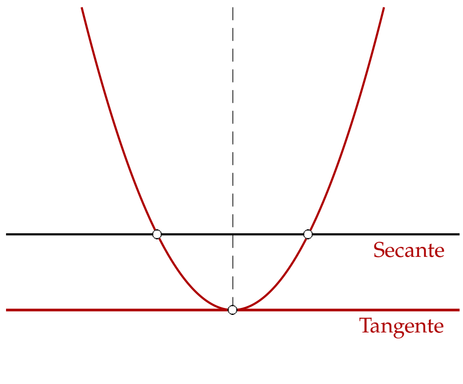


Circunferencia

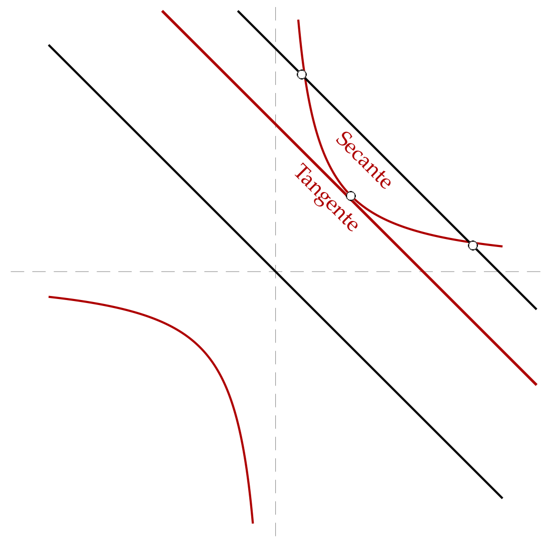


Elipse

[1] canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

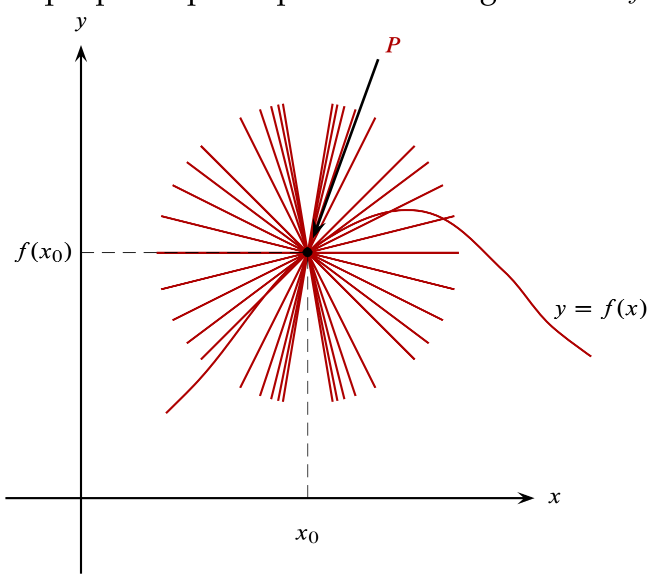


Parábola



Hipérbola

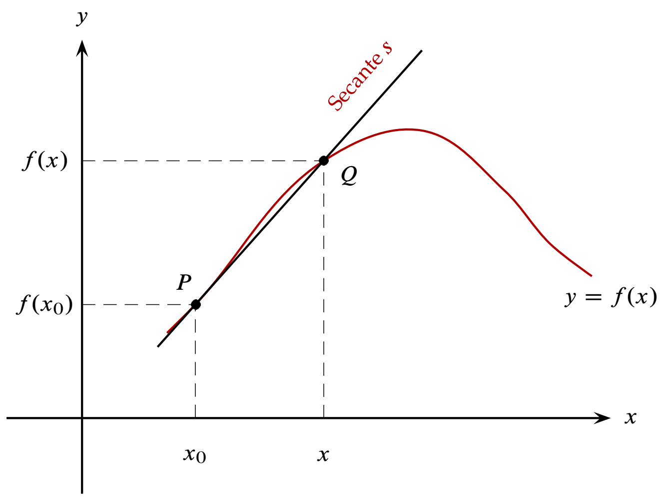
Pero lo descrito no se podía extender a otras curvas.
Pensemos ahora que tenemos la gráfica de una función f cualquiera y un punto $P[x_0, f(x_0)]$ fijo en ella y que queremos precisar a cuál recta, de todas las que pasan por el punto P, deberíamos llamarle la tangente a la curva (a la gráfica de la función f) en el punto.
Esto es, del haz infinito de rectas que pasan por el punto P de la gráfica de f:

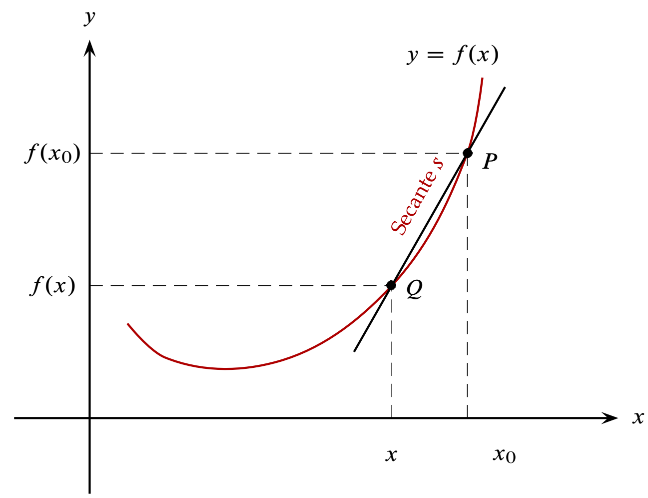


¿A cuál de ellas denominaremos recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P?
¿Cuál será la pendiente m de la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P? Para contestar a esta pregunta es necesario calcular la pendiente de la recta tangente con el fin de conocerla.

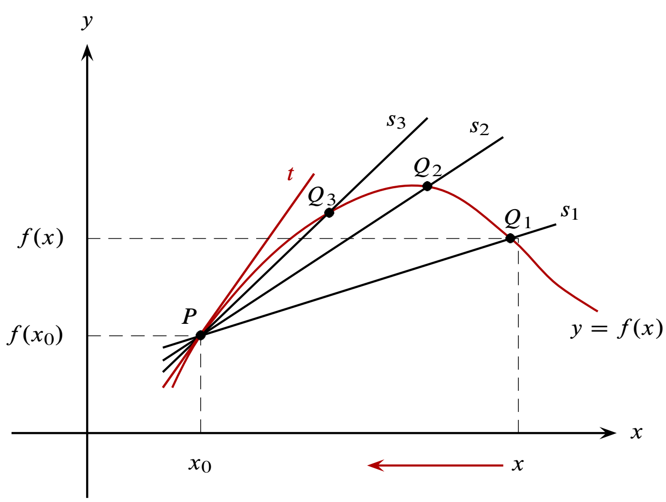
Sea f una función definida en un cierto intervalo abierto que contiene a x_0 y sea $P[x_0, f(x_0)]$ un punto fijo en la gráfica de f.
Si tomamos cualquier otro punto $Q[x, f(x)]$ sobre la gráfica de la función, la recta secante s que pasa por P y Q corta a la gráfica de la función al menos en estos dos puntos, P y Q, por lo que no parece

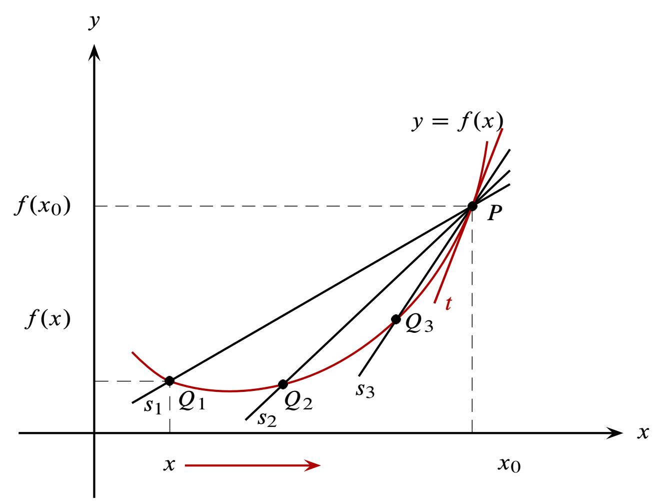
sensato pensar en ella como la tangente, pero en cambio sí parece lógico pensar que si Q estuviese cerca de P, entonces la recta secante s se aproximaría la tangente buscada y podríamos entonces pensar en definir la pendiente m_t de la recta tangente en P como el límite de la pendiente de la recta secante s, cuando el punto Q tendiese al punto P.





Pero para que esto suceda, intuimos que debe existir en el punto P una única recta t que sea la posición límite de las rectas secantes s, cuando el punto Q tiende al punto fijo P. Supongamos la existencia de esta recta tangente t.



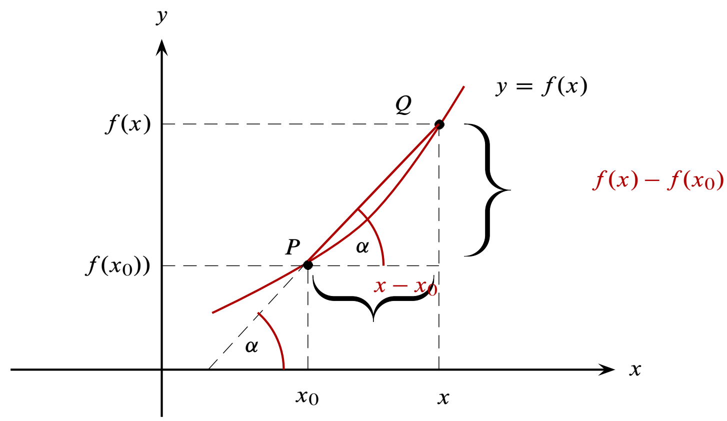


La pendiente de la recta secante s es

$$m_s = \tan\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}$$

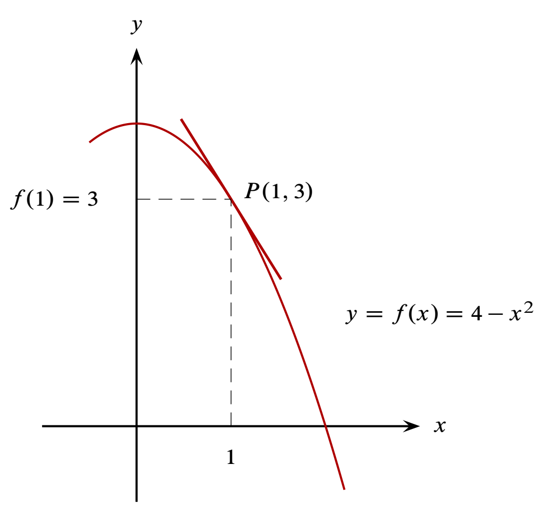
y como $x \to x_0$ cuando $Q \to P$, podríamos pensar que la pendiente m_t de la recta tangente t es

$$m_t = \lim_{Q \to P} m_s = \lim_{x \to x_0} m_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0) - f(x)}{x_0 - x}.$$



Ejemplo 5.1.1 *El punto $P(1,3)$ está en la gráfica de la función $f(x) = 4 - x^2$. Considerando valores de x alrededor (cerca) de $x_0 = 1$, ubicar los puntos $Q[x, f(x)]$ resultantes y calcular las pendientes m_s de las rectas secantes s que pasan por P y por Q.*

▼ Ésta es la gráfica de f:



Se genera la tabla siguiente:

x	$f(x)$	$Q[x, f(x)]$	$x-1$	$f(x)-3$	$m_s = \dfrac{f(x)-3)}{x-1}$
0.5	3.75	(0.5,3.75)	−0.5	0.75	−1.5
0.8	3.36	(0.8,3.36)	−0.2	0.36	−1.8
0.9	3.19	(0.19,3.19)	−0.1	0.19	−1.9
0.99	3.0199	(0.99,3.0199)	−0.01	0.0199	−1.99
0.999	3.001999	(0.999,3.001999)	−0.001	0.001999	−1.999
$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$	$\downarrow$
1	3	$(1, 3)$	0	0	−2
$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$	$\uparrow$
1.001	2.997999	(1.001,2.997999)	0.001	−0.002001	−2.001
1.01	2.9799	(1.01,2.9799)	0.01	−0.0201	−2.01
1.1	2.79	(1.1,2.79)	0.1	−0.21	−2.1
1.2	2.56	(1.2,2.56)	0.2	−0.44	−2.2
1.5	1.75	(1.5,1.75)	0.5	−1.25	−2.5

Se observa que las pendientes m_s tienden al número $m = -2$ cuando $x \to x_0 = 1$. Intuitivamente se puede decir que $m_t = -2$ es la pendiente de la recta tangente a la curva $y = 4 - x^2$ en el punto $P(1, 3)$.

$$
\begin{aligned}
m_t &= \lim_{Q \to P} m_s = \lim_{x \to x_0} m_s = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - 3}{x - 1} = \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(4 - x^2) - 3}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1 - x^2}{x - 1} = -\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = -\lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x - 1} = \\
&= -\lim_{x \to 1} (x + 1) = -2\,.
\end{aligned}
$$

□

Concretemos el concepto de recta tangente:

- Se denomina <u>recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto $P[x_0, f(x_0)]$</u> a aquella recta que pasa por P y que tiene pendiente
$$m_t = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,.$$

Notamos que se puede asegurar la existencia de la recta tangente siempre y cuando exista el límite anterior.

- Además la recta tangente tiene por ecuación: $y - f(x_0) = m_t(x - x_0)$.

  Ahora bien, si no existe el número m_t, podemos afirmar que de todas las rectas que pasan por el punto $P[x_0, f(x_0)]$ ninguna puede ser considerada como la recta tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto P. Esto es, la curva $y = f(x)$ no tiene recta tangente en el punto $P[x_0, f(x_0)]$.

Ejemplo 5.1.2 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$, *calcular la pendiente de la recta tangente a la gráfica de* f *en el punto* $[1, f(1)]$. *Obtener además la ecuación de dicha recta tangente.*

▼ Calculamos primero la pendiente de la recta secante que pasa por los puntos $P[1, f(1)]$ & $Q[x, f(x)]$ con $x \neq 1$ (o sea $x - 1 \neq 0$):

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{-1}}{x-1} = \frac{\dfrac{1}{x-2} + 1}{x-1} = \frac{\dfrac{1 + x - 2}{x-2}}{x-1} = \frac{x-1}{(x-2)(x-1)} = \frac{1}{x-2}\,.$$

Calculamos m_t que es la pendiente de la recta tangente en el punto $P[1, f(1)] = P(1, -1)$:

$$m_t = \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{1}{x-2} = -1\,.$$

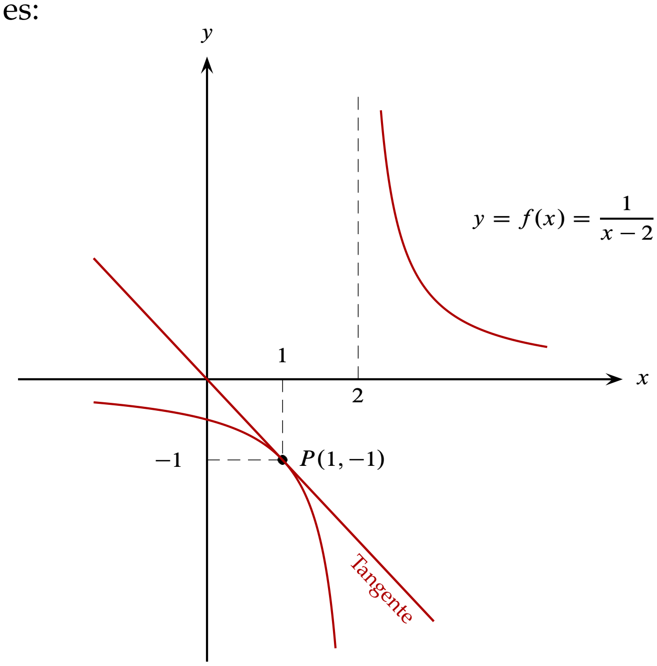
La ecuación de la recta tangente es

$$y - f(1) = m_t(x - 1)\,.$$

O sea,

$$y - (-1) = -1(x - 1) \;\Rightarrow\; y + 1 = -(x - 1) \;\Rightarrow\; y + 1 = -x + 1 \;\Rightarrow\; y = -x\,.$$

Lo cual nos da la recta con pendiente -1 y ordenada en el origen 0 (pasa por el origen, es la bisectriz del 2^o y 4^o cuadrante).
La gráfica correspondiente es:



□

Ejemplo 5.1.3 *Suponga que $y = f(x)$ es una recta, es decir, que f es una función lineal. Obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en un punto arbitrario $P[x_0, f(x_0)]$.*

▼ Puesto que f es lineal, entonces $f(x) = mx + n$ donde m es la pendiente de la recta y n su ordenada en el origen. La pendiente de la recta tangente es

$$\begin{aligned} m_t &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{(mx + n) - (mx_0 + n)}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \to x_0} m\frac{x - x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} m = m. \end{aligned}$$

Entonces la ecuación de la tangente en el punto $P[x_0, f(x_0)] = P(x_0, mx_0 + n)$ es

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= m_t(x - x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow\ y - (mx_0 + n) &= m(x - x_0) \Rightarrow \\ \Rightarrow\ y &= mx - mx_0 + mx_0 + n \\ y &= mx + n. \end{aligned}$$

Por lo que la tangente a una recta en cualquiera de sus puntos es la propia recta.

□

- Si una curva $y = f(x)$ tiene tangente en uno de sus puntos $P[x_0, f(x_0)]$, llamaremos recta normal en ese punto a la recta que pasa por el punto y es perpendicular a la recta tangente.

  Recordemos que si la pendiente de una recta es $m \neq 0$, entonces una recta perpendicular a ella tiene por pendiente a la negativamente recíproca: $-\dfrac{1}{m}$.

  Si $m = 0$, la recta es horizontal y una perpendicular a ella es vertical por lo que su ecuación es de la forma $x = x_0$ (constante), donde x_0 es la abscisa del punto por donde pasa la normal.

- Si existe $m_t = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, entonces la ecuación de la recta normal a una curva $y = f(x)$ en el punto $P[x_0, f(x_0)]$ será:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= -\frac{1}{m_t}(x - x_0) \quad \text{si } m_t \neq 0\,; \\ x &= x_0 \qquad\qquad\qquad\ \ \text{si } m_t = 0\,. \end{aligned}$$

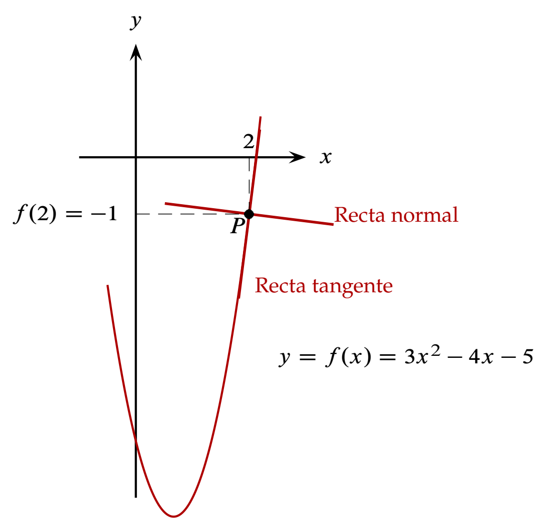
Ejemplo 5.1.4 *Obtener la ecuación de la recta normal a la curva $y = 3x^2 - 4x - 5$ en el punto de abscisa $x_0 = 2$.*

▼ Se puede verificar que el punto considerado es $P(2,-1)$ y que la pendiente de la recta tangente t a la curva $y = f(x)$ en P es 8.
Luego por ser $m_t = 8 \neq 0$, la pendiente de la recta normal n a la curva $y = f(x)$ en P es

$$m_n = \frac{-1}{m_t} = \frac{-1}{8} = -\frac{1}{8}\,.$$

Por lo tanto la ecuación de la recta normal a la curva en el punto $P(2,-1)$ es

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{m_t}(x - x_0) \;\Rightarrow\; y - (-1) = -\frac{1}{8}(x-2) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y + 1 = -\frac{x}{8} + \frac{2}{8} \;\Rightarrow\; y = -\frac{x}{8} + \frac{1}{4} - 1 \;\Rightarrow\; y = -\frac{1}{8}x - \frac{3}{4}\,.$$



□

Ejemplo 5.1.5 *Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = x^2 - 2x - 3$ en el punto de abscisa $x_0 = 1$.*

▼ La ordenada del punto considerado es

$$y_0 = y(x_0) = x_0^2 - 2x_0 - 3 = 1^2 - 2(1) - 3 = 1 - 5 = -4\,.$$

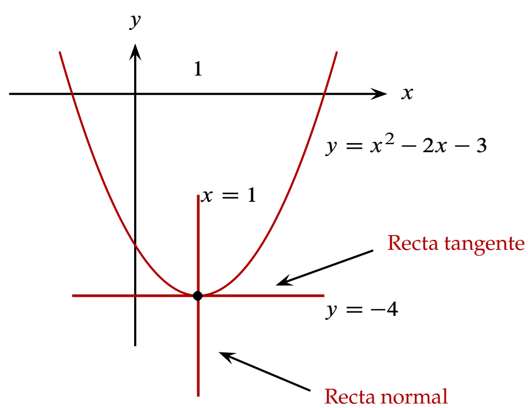
El punto considerado es $P(x_0, y_0) = P(1,-4)$, que es precisamente el vértice de la parábola $y = x^2 - 2x - 3$ (pues $x^2 - 2x - 3 = x^2 - 2x + 1 - 4 = (x-1)^2 - 4$).
La pendiente m_t de la recta tangente t a la curva $y = f(x)$ en el punto $P(1,-4)$ es

$$m_t = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 - 2x - 3) - (-4)}{x - 1} =$$
$$= \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x - 1) = 1 - 1 = 0\,.$$

La ecuación de la recta tangente t a la curva $y = x^2 - 2x - 3$ en el punto $P(1, -4)$ es

$$y - (-4) = 0(x-1) \;\Rightarrow\; y + 4 = 0 \;\Rightarrow\; y = -4\,,$$

que representa a la recta horizontal que pasa por $P(1, -4)$.
La ecuación de la recta normal n a la curva $y = x^2 - 2x - 3$ en el punto $P(1, -4)$ es $x = x_0 \;\Rightarrow\; x = 1$ que representa a la recta vertical que pasa por el punto $P(1, -4)$.



□

Ejercicios 5.1.1 *Soluciones en la página* **??**

1. La función h tiene la siguiente tabla de valores:

x	$h(x)$
2.99	769.605
2.995	795.755
2.999	816.801
3	822.08
3.001	827.366
3.005	848.58
3.009	869.907

Calcule la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de h que pasen por el punto $P[3, h(3)]$.

2. La función h tiene la siguiente tabla de valores:

x	$h(x)$
-1.9	20.9701
-1.99	26.3638
-1.999	26.936
-2	27
-2.001	27.064
-2.01	27.6438
-2.1	33.7901

Calcule la pendiente de dos rectas secantes a la gráfica de h que pasen por el punto $Q[-2, h(-2)]$.

3. La gráfica de la función
$$f(t) = -t^2 + 2t + 3$$
pasa por los puntos $[1.999, f(1.999)]$ y $[2.001, f(2.001)]$.

Obtenga el valor de la pendiente de las dos rectas secantes a la gráfica de f que pasan por el punto $(2, 3)$ y por los puntos dados.

4. La recta tangente a la curva $y = x^3 + 2$ en el punto $P(-1, 1)$ tiene pendiente 3. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva en el punto P.

5. La recta normal a la curva $y = \dfrac{2}{x}$ en el punto $Q(1, 2)$ tiene pendiente $\dfrac{1}{2}$. Determinar las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la curva en el punto Q.

6. La recta tangente a la curva $y = x^2 - 2x$ en el punto $R(1, -1)$ tiene pendiente cero. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada en el punto R.

7. La recta normal a la curva $y = x^2 - 4x + 4$ en el punto P de abscisa 2 es vertical. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva dada en el punto P.

8. Obtener las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 3 - x^2$ en el punto $P(-1, 2)$.

9. Determinar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva $y = 3x^2 - 6x$ en el punto Q de abscisa 1.

Ejercicios 5.1.1 *La recta tangente, página* **??**

1. La secante que pasa por los puntos $(2.999, 816.801)$ y $(3, 822.08)$ tiene pendiente $5\,279$;

   la secante que pasa por los puntos $(3.001, 827.366)$ y $(3, 822.08)$ tiene pendiente $5\,286$.
2. La secante que pasa por los puntos $[-2, h(-2)]$ y $[x_1, h(x_1)]$, $x_1 = -1.999$ tiene pendiente -64.38;

   la secante que pasa por los puntos $[-2, h(-2)]$ y $[x_2, h(x_2)]$, $x_2 = -2.001$ tiene pendiente -64.32 .
3. $m_1 = -1.999$; $\quad m_2 = -2.001$.
4. Recta tangente: $y = 3x + 4$;

   recta normal: $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{2}{3}$.
5. Recta normal: $y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$;

   recta tangente: $y = -2x + 4$.
6. Recta tangente: $y = -1$;

   recta normal: $x = 1$.
7. Recta normal: $x = 2$;

   recta tangente: $y = 0$.
8. Recta tangente: $y = 2x + 4$;

   recta normal: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$.
9. Recta tangente: $y = -3$;

   recta normal: $x = 1$.