

CAPÍTULO

2

Funciones

1

2.3 Álgebra de funciones

Para las funciones reales, el álgebra de los números reales induce un álgebra entre las funciones:

Nota: $\stackrel{\text{def}}{=}$ quiere decir que "así se define", que "es igual por definición a".

$$(f + g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + g(x);$$

$$(f - g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - g(x);$$

$$(f \times g)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) \times g(x);$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

El dominio de todas estas funciones es

$$D_f \cap D_g$$

con excepción del cociente, en el que a $D_f \cap D_g$ hay que quitarle las raíces o ceros de g , esto es, los $x \in D_g$ tales que $g(x) = 0$.

Ejemplo 2.3.1 Dadas las funciones

$$f(u) = \sqrt{25 - u^2}, \quad g(t) = \sqrt{t + 1} \quad \& \quad h(w) = w^2 - 4$$

obtener:

$$1. (f + g)(3), (gh)(3), (f - h)(3) \quad \& \quad \left(\frac{g}{f}\right)(3).$$

¹canek.azc.uam.mx: 22/ 5/ 2008

2. $(f - g)(x), (fh)(x), \left(\frac{f}{h}\right)(x), (g + f)(x) \ \& \ \left(\frac{g}{f}\right)(x).$

3. Los dominios de las funciones: $f, g \ \& \ h.$

4. Los dominios de las funciones: $f - g, fh, \frac{f}{h}, g + f \ \& \ \frac{g}{f}.$



1. Ya que

$$f(3) = \sqrt{25 - (3)^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4;$$

$$g(3) = \sqrt{3 + 1} = \sqrt{4} = 2;$$

$$h(3) = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5, \text{ entonces}$$

$$(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 4 + 2 = 6;$$

$$(gh)(3) = g(3) \cdot h(3) = 2 \cdot 5 = 10;$$

$$(f - h)(3) = f(3) - h(3) = 4 - 5 = -1;$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(3) = \frac{g(3)}{f(3)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

2. Ya que $f(x) = \sqrt{25 - x^2}, g(x) = \sqrt{x + 1}$ y $h(x) = x^2 - 4$, entonces

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{25 - x^2} - \sqrt{x + 1};$$

$$(fh)(x) = f(x)h(x) = \sqrt{25 - x^2} (x^2 - 4);$$

$$\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{25 - x^2}}{x^2 - 4};$$

$$(g + f)(x) = g(x) + f(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{25 - x^2};$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{25 - x^2}}.$$

3. El dominio de la función f es

$$\begin{aligned} D_f &= \{u \in \mathbb{R} \mid f(u) \in \mathbb{R}\} = \{u \in \mathbb{R} \mid \sqrt{25 - u^2} \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{u \in \mathbb{R} \mid 25 - u^2 \geq 0\} = \{u \in \mathbb{R} \mid u^2 \leq 25\} = \\ &= \{u \in \mathbb{R} \mid \sqrt{u^2} \leq \sqrt{25}\} = \{u \in \mathbb{R} \mid |u| \leq 5\} = \\ &= \{u \in \mathbb{R} \mid -5 \leq u \leq 5\} = [-5, 5]. \end{aligned}$$

El dominio de la función g es

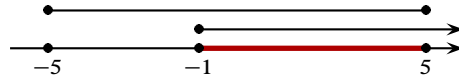
$$\begin{aligned} D_g &= \{t \in \mathbb{R} \mid g(t) \in \mathbb{R}\} = \{t \in \mathbb{R} \mid \sqrt{t + 1} \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{t \in \mathbb{R} \mid t + 1 \geq 0\} = \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq -1\} = [-1, +\infty). \end{aligned}$$

El dominio de la función h es

$$D_h = \{w \in \mathbb{R} \mid h(w) \in \mathbb{R}\} = \{w \in \mathbb{R} \mid w^2 - 4 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.$$

4. El dominio de la función $f - g$ es

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g = [-5, 5] \cap [-1, +\infty) = [-1, 5].$$



El dominio de la función fh es

$$D_{fh} = D_f \cap D_h = [-5, 5] \cap \mathbb{R} = [-5, 5].$$

El dominio de la función $\frac{f}{h}$ es

$$\begin{aligned} D_{\frac{f}{h}} &= (D_f \cap D_h) - \{w \in \mathbb{R} \mid h(w) = 0\} = \\ &= ([-5, 5] \cap \mathbb{R}) - \{w \in \mathbb{R} \mid w^2 - 4 = 0\} = [-5, 5] - \{w \in \mathbb{R} \mid w^2 = 4\} = \\ &= [-5, 5] - \{-2, 2\} = [-5, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, 5]. \end{aligned}$$

El dominio de la función $g + f$ es

$$D_{g+f} = D_g \cap D_f = [-1, +\infty) \cap [-5, 5] = [-1, 5].$$

Este resultado es claro, pues $D_{g+f} = D_g \cap D_f = D_f \cap D_g = D_{f-g}$.

El dominio de la función $\frac{g}{f}$ es

$$\begin{aligned} D_{\frac{g}{f}} &= (D_g \cap D_f) - \{u \in \mathbb{R} \mid f(u) = 0\} = [-1, 5] - \{u \in \mathbb{R} \mid \sqrt{25 - u^2} = 0\} = \\ &= [-1, 5] - \{u \in \mathbb{R} \mid 25 - u^2 = 0\} = [-1, 5] - \{u \in \mathbb{R} \mid u^2 = 25\} = \\ &= [-1, 5] - \{-5, 5\} = [-1, 5). \end{aligned}$$

□

Ejercicios 2.3.1 Soluciones en la página 5

Dadas las funciones $f(t) = t^2 - 9$, $g(y) = \sqrt{2y + 15}$ & $h(z) = \sqrt{10 - 3z}$ obtener:

1. $(f + g)(5)$.
2. $(gf)(-3)$.
3. $\left(\frac{h}{f}\right)(2)$.
4. $(g - f)\left(\frac{1}{2}\right)$.
5. $(gh)(4)$.
6. $\left(\frac{f}{g}\right)(-8)$.
7. $(g + h)(x)$.
8. $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$.

9. $(fh)(x)$.
10. $(h - f)(x)$.
11. $\left(\frac{h - g}{f}\right)(x)$.
12. $\left(\frac{fg}{h}\right)(x)$.
13. Los dominios de las funciones f, g & h .
14. El dominio de la función: $g + h$.
15. El dominio de la función: $\frac{g}{f}$.
16. El dominio de la función: fh .
17. El dominio de la función: $h - f$.
18. El dominio de la función: $\frac{h}{g}$.
19. El dominio de la función: $\frac{fg}{h}$.
20. El dominio de la función: $\frac{g + h}{gh}$.

Ejercicios 2.3.1 Álgebra de funciones, página 3

1. 21.
2. 0.
3. $-\frac{2}{5}$.
4. $\frac{51}{4}$.
5. No definido.
6. No definido.
7. $\sqrt{2x+15} + \sqrt{10-3x}$.
8. $\frac{\sqrt{2x+15}}{x^2-9}$.
9. $(x^2-9)\sqrt{10-3x}$.
10. $\sqrt{10-3x} - (x^2-9)$.
11. $\frac{\sqrt{10-3x} - \sqrt{2x+15}}{x^2-9}$.
12. $\frac{(x^2-9)\sqrt{2x+15}}{\sqrt{10-3x}}$.
13. $D_f = \mathbb{R}, D_g = \left[-\frac{15}{2}, +\infty\right), D_h = \left(-\infty, \frac{10}{3}\right]$.
14. $\left[-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right]$.
15. $\left[-\frac{15}{2}, +\infty\right) - \{-3, 3\}$.
16. $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right]$.
17. $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right]$.
18. $\left(-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right]$.
19. $\left[-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right)$.
20. $\left(-\frac{15}{2}, \frac{10}{3}\right)$.