Gráfica de una función sujeta a ciertas condiciones

1. Bosquejar la gráfica de una función continua f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

   a. $f(-4) = 0$;
   b. $f'(-4) = -1$;
   c. $f(-1) = -3$;
   d. $f'(-1) = 0$;
   e. $f(2) = 5$;
   f. $f'(2) = 1$;
   g. $f(0) = 0$;
   h. $f'(0)$ no existe;
   i. $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = +\infty$;
   j. $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, -1)$;
   k. $f'(x) > 0$ si $x \in [-1, +\infty) - \{0\}$;
   l. $f''(x) > 0$ si $x \in (-\infty, 0)$;
   m. $f''(x) < 0$ si $x \in (0, +\infty)$.

   s d 9

2. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumple los requisitos siguientes:

   a. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -3$;
   b. $\lim\limits_{x\to -4} f(x) = 0$;
   c. $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = +\infty$;
   d. $f'(x) > 0$ para $x < -2$;
   e. $f''(x) > 0$ para $x < -2$;
   f. $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = 0$;
   g. $f(0) = -3$;
   h. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$;
   i. $f'(x) < 0$ para $-2 < x < 1$;
   j. $f''(x) < 0$ para $-2 < x < 1$;
   k. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 2$;
   l. $f(3) = -1$;
   m. $f'(3) = 0$;
   n. $f'(x) < 0$ para $1 < x < 3$;
   o. $f'(x) > 0$ para $x > 3$;
   p. $f''(x) > 0$ para $1 < x < 5$;
   q. $f(5) = 0$;
   r. $f''(x) < 0$ para $x > 5$;
   s. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 2$.

   s d 38

3. Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga las condiciones siguientes:

   a. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -2$;
   b. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$;
   c. $f(0) = -1$;
   d. $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = +\infty$;
   e. $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -\infty$;
   f. $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 3$;
   g. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 4$;
   h. $f(-1) = -2$;
   i. $f'(-1)$ no existe;
   j. $f''(1) = 0$;
   k. $f''(x) < 0$ para $0 < x < 1$;
   l. $f'\left(\frac{1}{2}\right) > 0$.

   s d 40

4. Trace una posible gráfica para una función f continua en su dominio: $(-\infty, 5] - \{-2, 3\}$ y que satisfaga:

1 canek.azc.uam.mx: 15/ 5/ 2015/893

- $f(5) = 3$;
- $f(1) = \dfrac{1}{2}$;
- $\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$;
- $f'(1) = 0$;
- $f'(2) = 0$;
- $f'(4) = 0$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (-\infty, -2)$;
- $\lim_{x \to 3} f(x) = 4$;
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 2$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (1, 4) - \{3\}$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (-2, 1)$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (4, 5)$.

Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica, los máximos y mínimos locales, y absolutos.

s d 53

5. Trace una posible gráfica para una función f continua en su dominio: $[-4, +\infty) - \{-3, 2\}$ y que satisfaga:

- $f(-4) = 2$;
- $f(1) = -1$;
- $\lim_{x \to -3} f(x) = 3$;
- $f'(-2) = 0$;
- $f'(-1) = 0$;
- $f'(1) = 0$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (-4, -2) - \{-3\}$;
- $\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty$;
- $\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (-2, 1) - \{-1\}$;
- $f'(x) > 0$ si $x \in (1, 2)$;
- $f'(x) < 0$ si $x \in (2, \infty)$.

Especifique los intervalos de concavidad de su gráfica, los máximos y mínimos locales, y absolutos.

s d 55

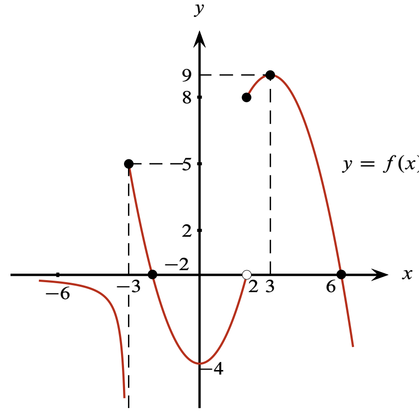
6. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumpla las siguientes condiciones:

- $f'(x) > 0$ para $x \in (-\infty, -2) \cup (-2, 4)$;
- $f'(x) < 0$ para $x \in (4, +\infty)$;
- tiene asíntota vertical en $x = -2$;
- $y = 1$ es asíntota horizontal de f.

s d 59

Interpretar la gráfica de una función

1. Considere la siguiente gráfica de la función f

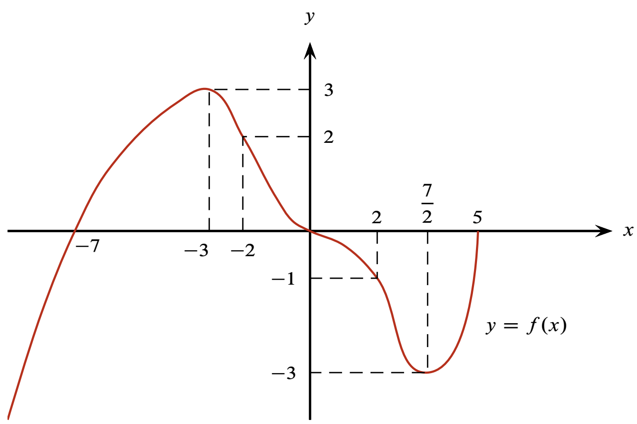


y determine:

a. Los puntos donde la derivada no existe.
b. Los puntos donde $f'(x) = 0$.
c. Los intervalos donde $f'(x) > 0$.
d. Los intervalos donde $f'(x) < 0$.
e. Los intervalos donde $f''(x) > 0$.
f. Los intervalos donde $f''(x) < 0$.

s d 11

2. Si la gráfica de f es

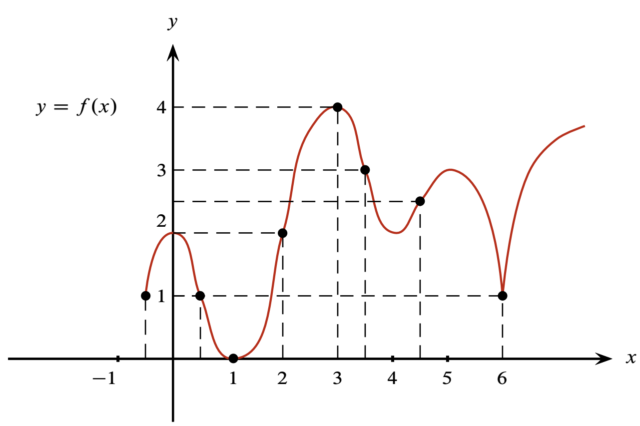


halle:

a. Dominio, raíces, paridad y rango.
b. Monotonía, máximos y mínimos locales y absolutos.
c. Concavidad y puntos de inflexión.
d. Intervalos donde $f'(x) > 0$, donde $f'(x) < 0$, donde $f''(x) > 0$ y donde $f''(x) < 0$.
e. Puntos donde $f'(x) = 0$ e intervalos donde $f(x) > 0$ y donde $f(x) < 0$.

s d 22

3. A partir de la gráfica dada de f, cuyo dominio es $[-0.5, \infty)$



determine:

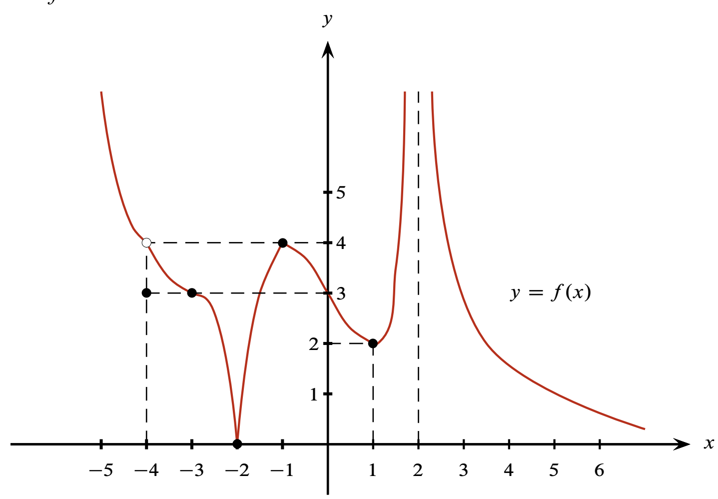
a. Los intervalos de crecimiento y los de decrecimiento.

b. Los intervalos de concavidad hacia arriba y los de concavidad hacia abajo.

c. Los máximos y mínimos relativos, los máximos y mínimos absolutos, y los puntos de inflexión.

s d 24

4. A partir de la gráfica de f



determine el conjunto de puntos del dominio de f que satisfacen:

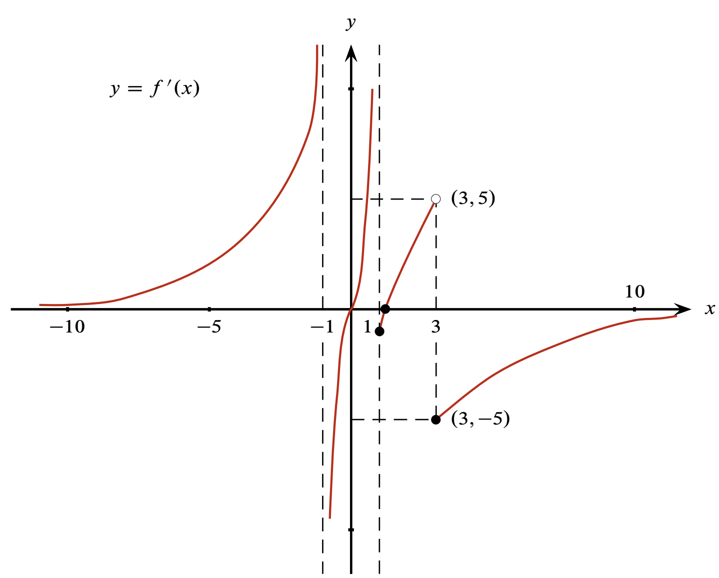
a. $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f'(x) = 0$.

b. $f'' > 0$, $f''(x) < 0$, $f''(x) = 0$.

c. $f'(x)$ no existe.

s d 25

5. La figura siguiente muestra la gráfica de la derivada de una función f la cual es continua en todos los reales.



A partir de ella, determine:

a. Intervalos donde f es creciente o decreciente.

b. Puntos críticos de f.

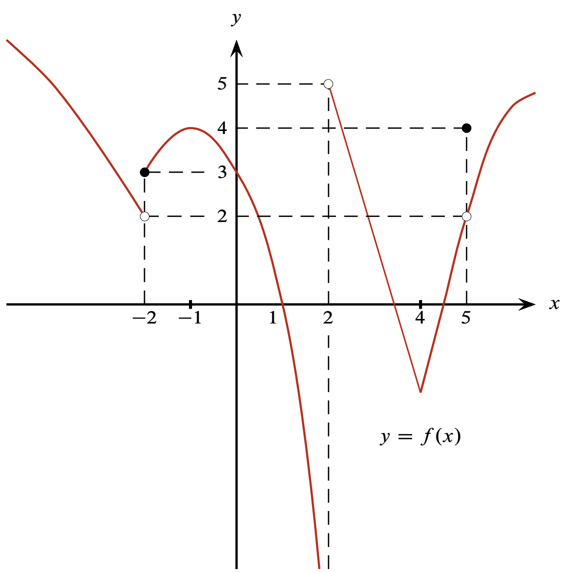
c. Extremos relativos de f.

d. Concavidad de f.

e. Abscisas de los puntos de inflexión de f.

s d 46

6. Sea f la función que tiene la siguiente gráfica



determine:

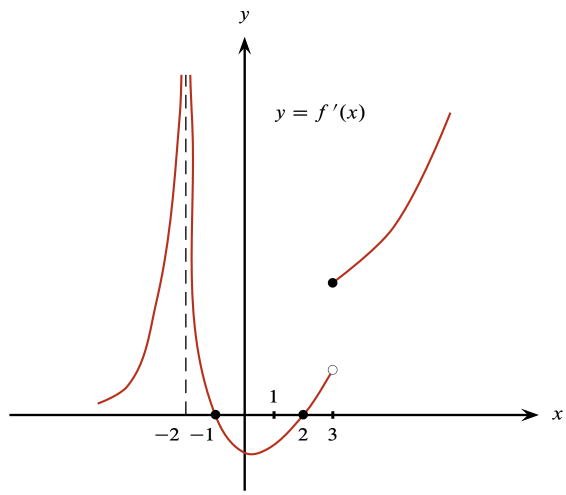
a. Los intervalos de continuidad y los siguientes valores $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ & $f(a)$, para $a = -2$, $a = 2$, $a = 5$.

b. La clasificación de discontinuidades. ¿En cuáles puntos y con qué valores se puede redefinir f para convertirla en una función continua en esos puntos?

c. Los intervalos donde $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ y los puntos donde $f'(x) = 0$, o donde no existe la derivada.

s d 51

7. Sea $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ cuya primera derivada f' tiene la siguiente gráfica:



Determinar dónde la función f es creciente y dónde es decreciente. Explicar además, cómo es la tangente a la gráfica de f en $x = -2$, $x = -1$, $x = 2$ & $x = 3$.

s d 57