

Límites en infinito.

I. Calcular los límites siguientes:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 3}{4x}$

s **d** 53

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 - 5x + 6}{2x^3 - 3x^2 + 8}$

s **d** 54

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 6x - 7}{3x^5 - 2x + 1}$

s **d** 64

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 2x + 1}{5x^3 + 6x - 7}$

s **d** 65

5. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$

s **d** 55

6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

s **d** 56

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 16}}{x + 4}$

s **d** 71

8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x - 3}{\sqrt{3x^2 + 2x + 6}}$

s **d** 73

9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{\sqrt{(3x - 2)^3}}$

s **d** 74

10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4 - 3x^2 - 1}}{x^2 - 1}$

s **d** 97

11. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x + 2}{\sqrt{3x^2 + 2x + 5}}$

s **d** 111

12. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x + 1}{\sqrt{9x^2 + 5}}$

s **d** 121

13. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{8x + 6}{\sqrt{5x^2 + 6x - 8}}$

s **d** 131

14. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{3 + 2x}$

s **d** 137

15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 6} + x)$

s **d** 139

16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5} + 5x}{23x + 4}$

s **d** 140

17. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{9 + 4x^2}}{3 + x}$

s **d** 142

18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

s **d** 143

$$19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 - 1}}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

s **d** 57

$$20. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}$$

s **d** 58

$$21. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 5\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{2x^2 + 1}}$$

s **d** 126

$$22. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 - 1} - \frac{x^2}{2x + 1} \right)$$

s **d** 107

$$23. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$$

s **d** 59

$$24. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x)$$

s **d** 60

$$25. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5} - x)$$

s **d** 61

$$26. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} - x)$$

s **d** 62

$$27. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 4x + 3} + x)$$

s **d** 63

$$28. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 5x} - x)$$

s **d** 92

$$29. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + x} - \sqrt{4x^2 - 2})$$

s **d** 95

$$30. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} - x)$$

s **d** 114

$$31. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$

s 127 **d**

$$32. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 2x + 6} + x)$$

s **d** 128

$$33. \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^3 + x} - \sqrt{x^3 + 1})$$

s **d** 129

$$34. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - x)$$

s **d** 133

$$35. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 5x - 3})$$

s **d** 147

Miscelánea de problemas sobre límites.

Un límite muy especial para una función f es $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Calculemos este límite para:

1. $f(x) = c$ con c constante.

s **d** 25

2. $f(x) = ax + b$ con a, b constantes.

s **d** 26

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$ con a, b, c constantes.

s **d** 27

4. $f(x) = ax^3$ con a constante.

s **d** 28

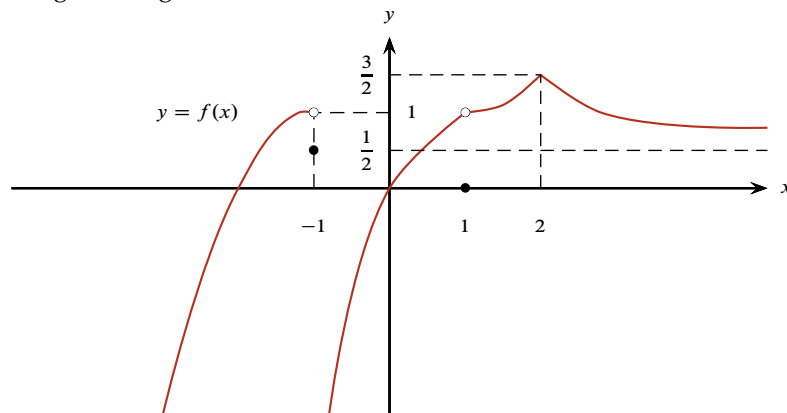
5. $f(x) = \frac{c}{ax + b}$ con a, b, c constantes.

s **d** 29

6. $f(x) = \sqrt{x}$.

s **d** 30

7. La función f tiene la gráfica siguiente:



a. Determine:

i. $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$;

ii. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$;

iii. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$;

iv. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$;

v. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$;

vi. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$;

vii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

viii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b. Calcule $f(1)$, $f(2)$ y también $f(-1)$.

c. ¿Existen los límites $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$?

s **d** 66

8. Considere la función:
$$h(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-x}} & \text{si } x \leq -1; \\ \frac{\sqrt{x+5}-2}{x+1} & \text{si } x > -1. \end{cases}$$

- a. Calcule el $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$.
 b. ¿Existe $\lim_{x \rightarrow -1} h(x)$? Justifique su respuesta.

s **d** 69

9. Grafique una función que cumpla con los siguientes requisitos:

- a. $f(0) = 0$;
 b. $f(5) = 1$;
 c. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$;
 d. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$;
 e. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$;
 f. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$;
 g. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 4$.

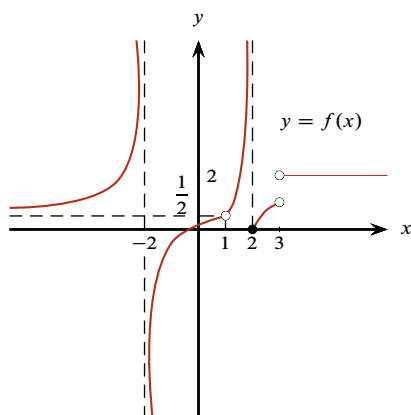
s **d** 72

10. Trace la gráfica de una función f que satisfaga las siguientes condiciones:

- a. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0$;
 b. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$;
 c. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$;
 d. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$;
 e. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$;
 f. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$;
 g. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$;
 h. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$;
 i. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$;
 j. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$;
 k. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 5$.

s **d** 79

11. La función f tiene la gráfica siguiente:



a. De la gráfica determine:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| i. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x);$ | vi. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x);$ |
| ii. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x);$ | vii. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x);$ |
| iii. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x);$ | viii. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x);$ |
| iv. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x);$ | ix. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x);$ |
| v. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x);$ | x. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$ |

b. Calcule $f(-2)$, $f(1)$ y $f(2)$.

c. ¿Existen o no los siguientes límites?: $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$.

s **d** 80

12. Considere la función $g(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 3x} & \text{si } x \leq -8; \\ \frac{(x + 3)|x + 2|}{x + 2} & \text{si } -8 < x < -2; \\ \sqrt{9 - x^2} & \text{si } x \geq -2. \end{cases}$

a. Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

b. ¿Existe el $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$? Justifique su respuesta.

s **d** 81

13. De la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{5x^2 + 3x + 1}}{\sqrt{2x^2 - 3}} & \text{si } x \leq -4; \\ \frac{16 - x^2}{5 - \sqrt{x^2 + 9}} & \text{si } -4 < x < 1, \end{cases}$

determinar los límites laterales en -4 y el límite en $-\infty$.

s **d** 82

14. Para la función f definida por $f(x) = \frac{4x^2}{\sqrt{x^2 - 4}}$, determine:

- Dominio y raíces.
- Asíntotas verticales y horizontales.
- Bosquejo gráfico.

s **d** 88

15. Dar un bosquejo de la gráfica de una función f que cumpla los requisitos siguientes:

Es continua en los intervalos $(-\infty, -2)$, $[-2, 1)$, $[1, 3]$ y en $(3, +\infty)$; y además:

- | | |
|---|--|
| a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$; | g. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2$; |
| b. $\lim_{x \rightarrow -4} f(x) = 0$; | h. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$; |
| c. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$; | i. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -1$; |
| d. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 0$; | j. $\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0$; |
| e. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$; | k. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. |
| f. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$; | |

s **d** 96

16. Dibuje una gráfica de una función f que satisfaga todas las condiciones siguientes:

- | | |
|---|--|
| a. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2$; | e. $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$; |
| b. $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$; | f. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$; |
| c. $f(0) = -1$; | g. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 4$. |
| d. $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$; | |

s **d** 98

17. Bosquejar la gráfica de una función f que cumpla las condiciones siguientes:

- | | |
|---|--|
| a. $f(-1) = 0$; | f. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -2$; |
| b. $f\left(\frac{3}{2}\right) = -3$; | g. $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1$; |
| c. $f(0) = \frac{1}{2}$; | h. $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$; |
| d. $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -1$; | i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$; |
| e. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$; | j. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$. |

s **d** 102

18. Bosqueje la gráfica de una función que cumpla las siguiente condiciones:

a. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$;

b. $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 5$;

c. $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 4$;

d. $f(0) = 0$;

e. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$;

f. $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$;

g. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$;

h. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

s **d** 113

19. Considere las funciones $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$ & $g(x) = \frac{x^2-9}{x^2-x-2}$ con sus dominios naturales.

a. Grafique las funciones f & g .

b. Calcule $\lim_{x \rightarrow 1^+} (g \circ f)(x)$.

c. Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f \circ g)(x)$.

s **d** 115