

CAPÍTULO

1

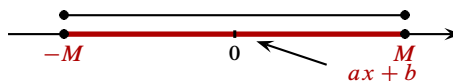
Los números reales

1

1.7.4 Desigualdades tipo $|ax + b| \leq M$ con $M > 0$

(Si $M < 0$, el conjunto solución es el vacío pues $|ax + b| \geq 0$, y no puede ser menor o igual que un número negativo. Si $M = 0$, la desigualdad se transforma en la ecuación $ax + b = 0$, cuya solución es $x = -\frac{b}{a}$ para $a \neq 0$.)

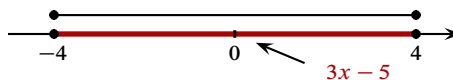
La desigualdad propuesta es equivalente a la doble desigualdad $-M \leq ax + b \leq M$,



y se cumple cuando: $ax + b \geq -M$ & $ax + b \leq M$ (ambas del tipo anterior).

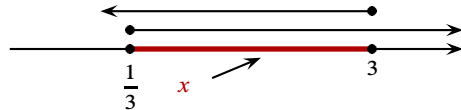
Ejemplo 1.7.1 Resolver la desigualdad $|3x - 5| \leq 4$.

▼ Esta desigualdad se cumple cuando $-4 \leq 3x - 5 \leq 4$,



doble desigualdad que se cumple si:

$$\begin{aligned}
 & 3x - 5 \geq -4 & \& & 3x - 5 \leq 4 & \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & 3x \geq -4 + 5 & \& & 3x \leq 4 + 5 & \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & x \geq \frac{1}{3} & \& & x \leq \frac{9}{3} & \Leftrightarrow \\
 \Leftrightarrow & x \in CS_1 = \left[\frac{1}{3}, +\infty \right) & \& & x \in CS_2 = (-\infty, 3] .
 \end{aligned}$$



El conjunto solución es:

$$CS = CS_1 \cap CS_2 = \left[\frac{1}{3}, +\infty \right) \cap (-\infty, 3] = \left[\frac{1}{3}, 3 \right].$$

Observación: esta desigualdad se puede resolver de otra manera:

$$|3x - 5| \leq 4 \Rightarrow -4 \leq 3x - 5 \leq 4.$$

Notando que la incógnita x aparece solamente en el miembro intermedio de la doble desigualdad, procedemos a despejarla así:

Sumamos 5 a los tres miembros

$$-4 \leq 3x - 5 \leq 4 \Leftrightarrow -4 + 5 \leq 3x - 5 + 5 \leq 4 + 5 \Leftrightarrow 1 \leq 3x \leq 9;$$

multiplicamos por $\frac{1}{3}$ los tres miembros (con $\frac{1}{3} > 0$)

$$\frac{1}{3}(1) \leq \frac{1}{3}(3x) \leq \frac{1}{3}(9) \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq \frac{9}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq x \leq 3.$$

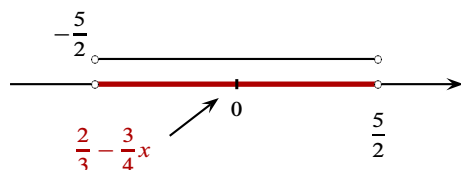
Por lo que el conjunto solución es:

$$CS = \left[\frac{1}{3}, 3 \right].$$

□

Ejemplo 1.7.2 Resolver la desigualdad $\left| \frac{2}{3} - \frac{3}{4}x \right| < \frac{5}{2}$.

▼ Esta desigualdad se cumple cuando $-\frac{5}{2} < \frac{2}{3} - \frac{3}{4}x < \frac{5}{2}$,



doble desigualdad que resolvemos despejando la x .

Sumamos $\left(-\frac{2}{3}\right)$ a los tres miembros

$$-\frac{5}{2} - \frac{2}{3} < -\frac{3}{4}x < \frac{5}{2} - \frac{2}{3} \Leftrightarrow -\frac{19}{6} < -\frac{3}{4}x < \frac{11}{6}.$$

Multiplicamos por $\left(-\frac{4}{3}\right)$ los tres miembros (observando que $-\frac{4}{3} < 0$)

$$\begin{aligned} \left(-\frac{4}{3}\right) \left(-\frac{19}{6}\right) > x > \left(-\frac{4}{3}\right) \left(\frac{11}{6}\right) &\Leftrightarrow \frac{38}{9} > x > -\frac{22}{9} \Leftrightarrow -\frac{22}{9} < x < \frac{38}{9} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x \in CS = \left(-\frac{22}{9}, \frac{38}{9}\right). \end{aligned}$$

□