CAPÍTULO

6

Reglas de derivación

1

6.6 Derivación implícita

Hasta aquí la palabra derivada ha sido asociada a funciones definidas explícitamente mediante una igualdad de la forma $y = f(x)$, donde una de las variables (y) aparece explícitamente definida como función de otra variable (x).

En esta situación [dada la función $y = f(x)$], al mencionar la palabra derivada entendemos que se está haciendo referencia a la derivada $\left[\dfrac{dy}{dx} = f'(x)\right]$ de la variable (dependiente) y con respecto a la variable (independiente) x.

Pero no siempre se define a una función en forma explícita como en $y = f(x)$. Puede ocurrir que la variable y sea función de la variable x, definida implícitamente en una ecuación de la forma $g(x, y) = 0$, donde estén relacionadas dichas variables. Veamos algunos ejemplos:

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$.
2. $x^2 + y^3 - 6xy = 0$.
3. $(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 - 36 = 0$.

Si tenemos una ecuación en la que aparecen las variables x & y, además de constantes y de operaciones entre ellas, nos podemos preguntar si y es función de x.

Es claro que si podemos despejar la y, dejándola sola en un miembro, habremos contestado afirmativamente a la pregunta, y decimos que tenemos esta y expresada explícitamente como función de x y que en la igualdad original se tenía esa y definida implícitamente como función de x.

Más aún, nos podemos seguir preguntando si la función y (expresada implícitamente) es derivable y en este caso, ¿cómo podríamos calcular su derivada directamente de la igualdad original? La derivada puede calcularse por el método de derivación implícita, que consiste en suponer que

1. canek.azc.uam.mx: 12/ 5/ 2014

y es una función derivable de x y derivar ambos miembros de la ecuación con respecto a x, obteniendo términos que contengan la derivada y' para finalmente despejar la derivada y' que queda en términos de x & y.

Ejemplo 6.6.1 *Calcular* $\dfrac{dy}{dx}$ *en la ecuación* $x^2 + y^2 = 1$.

▼ Suponemos que y es una función derivable de x. Luego, derivando con respecto a x ambos miembros de la ecuación,

$$\frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}1 \;\Rightarrow\; 2x + 2y \times \left(\frac{dy}{dx}\right) = 0\,.$$

(Obsérvese que para derivar y^2 hemos usado la regla de la potencia y decimos que su derivada es $2y \cdot y'$ por la regla de la cadena.)
Entonces

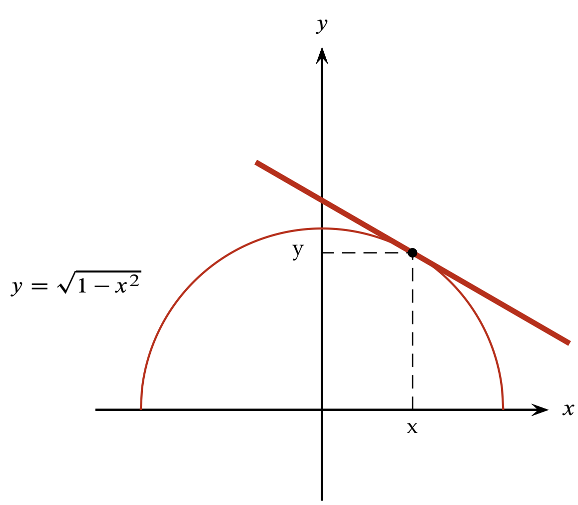
$$2y \cdot y' = -2x \;\Rightarrow\; y' = -\frac{x}{y} \text{ donde } y \neq 0\,.$$

Comprobación. Si despejamos y de $x^2 + y^2 = 1$, obtenemos que:

$$y^2 = 1 - x^2 \;\Rightarrow\; |\,y\,| = \sqrt{1 - x^2} \;\Rightarrow\; y = \pm\sqrt{1 - x^2}\,.$$

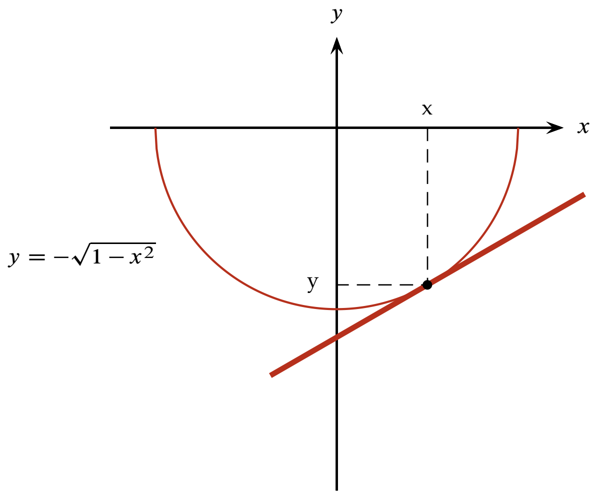
Entonces y no es función de x, pues a un valor de $x \in (-1, 1)$ le corresponden dos valores de y, pero si pensamos que $y = \sqrt{1 - x^2}$ para $x \in (-1, 1)$ (donde $y \neq 0$), tenemos

$$y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; y' = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}\,.$$



Análogamente para $y = -\sqrt{1 - x^2}$, $x \in (-1, 1)$:

$$y = -(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} \;\Rightarrow\; y' = -\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{-\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{y}\,.$$



□

Nota. La comprobación que hemos proporcionado en este primer ejemplo no es algo que siempre pueda hacerse, ya que, generalmente, en la ecuación dada en ocasiones no se puede despejar una de las variables en función de la otra.

Ejemplo 6.6.2 *Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por*

$$x^3 + y^3 = 6xy \quad \textit{(la hoja de Descartes)}$$

en el punto $(3, 3)$.

▼ El punto $(3, 3)$ sí pertenece a la curva definida por $x^3 + y^3 = 6xy$, pues sus coordenadas, $x = 3$ & $y = 3$, satisfacen la ecuación: $3^3 + 3^3 = 27 + 27 = 54 = 6 \cdot 3 \cdot 3$.
Suponemos que en la ecuación $x^3 + y^3 = 6xy$ define implícitamente a $y = \phi(x)$; entonces, calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ derivando implícitamente con respecto a x.

$$\frac{d}{dx}(x^3 + y^3) = \frac{d}{dx}(6xy);$$
$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) = 6\frac{d}{dx}(xy).$$

Aplicando las reglas de la potencia y la del producto:

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\frac{dx}{dx}\right).$$

(Nótese que $\dfrac{dx}{dx} = 1$.)

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6\left(x\frac{dy}{dx} + y\right);$$
$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 6x\frac{dy}{dx} + 6y.$$

Dividiendo entre tres

$$x^2 + y^2\frac{dy}{dx} = 2x\frac{dy}{dx} + 2y.$$

Despejamos $\dfrac{dy}{dx}$

$$\begin{aligned} y^2\frac{dy}{dx} - 2x\frac{dy}{dx} &= 2y - x^2;\\ (y^2-2x)\frac{dy}{dx} &= 2y - x^2;\\ \frac{dy}{dx} &= \frac{2y-x^2}{y^2-2x}. \end{aligned}$$

(Nótese que la derivada está en función de x & y, y existe sólo si $y^2 - 2x \neq 0$.)
Evaluamos la derivada en el punto $(3,3)$ de la gráfica de la función implícitamente definida:

$$y'(3,3) = \frac{2(3)-3^2}{3^2-2(3)} = \frac{6-9}{9-6} = \frac{-3}{3} = -1.$$

La ecuación de la recta tangente en el punto $(3,3)$ con pendiente -1 es

$$\frac{y-3}{x-3} = -1 \;\Rightarrow\; y-3 = -x+3 \;\Rightarrow\; y = -x+6.$$

□

Ejemplo 6.6.3 *Suponiendo que en la siguiente ecuación se defina implícitamente $y = \phi(x)$, calcular en el punto $(2,\sqrt{2})$ la ecuación de la recta tangente a la curva*

$$(x^2+y^2+4)^2 - 16x^2 = 36.$$

▼ En efecto, el punto $(2,\sqrt{2})$ pertenece a la curva pues sus coordenadas $x = 2$ & $y = \sqrt{2}$ satisfacen la ecuación ya que

$$[2^2 + (\sqrt{2})^2 + 4]^2 - 16(2)^2 = (4+2+4)^2 - 16\times 4 = 10^2 - 64 = 100 - 64 = 36.$$

Calculemos la pendiente de la recta tangente obteniendo implícitamente la derivada de la función

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[(x^2+y^2+4)^2 - 16x^2\right] &= \frac{d}{dx}(36) \;\Rightarrow\\ \Rightarrow\; 2(x^2+y^2+4)(2x+2yy') - 32x &= 0 \;\Rightarrow\\ \Rightarrow\; 4(x^2+y^2+4)(x+yy') &= 32x \;\Rightarrow\\ \Rightarrow\; x + yy' &= \frac{32x}{4(x^2+y^2+4)} \;\Rightarrow\\ \Rightarrow\; y' &= \frac{1}{y}\left(\frac{8x}{x^2+y^2+4} - x\right). \end{aligned}$$

La derivada y' existe si $y \neq 0$.

En particular, en el punto $(2, \sqrt{2})$, la pendiente vale

$$y'(2, \sqrt{2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{16}{10} - 2\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{2}{5\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{5};$$

la ecuación de la recta tangente es

$$y - \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{5}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{5}x + \frac{2}{5}\sqrt{2} + \sqrt{2} = -\frac{\sqrt{2}}{5}x + \frac{7}{5}\sqrt{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = -\frac{\sqrt{2}}{5}(x-7).$$

□

Ejemplo 6.6.4 *Determinar los puntos de la curva*

$$x^2 + y^2 = 4x + 4y$$

en los que la recta tangente es horizontal.

▼ Suponemos que en la ecuación $x^2 + y^2 = 4x + 4y$ se tiene definida implícitamente la función $y = \phi(x)$ y calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ derivando implícitamente con respecto a x.

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(4x + 4y) \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2x + 2y\frac{dy}{dx} = 4 + 4\frac{dy}{dx} \Rightarrow \\
&\Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} - 4\frac{dy}{dx} = 4 - 2x \Rightarrow \\
&\Rightarrow (2y-4)\frac{dy}{dx} = 4 - 2x \Rightarrow \\
&\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{2y-4} = \frac{2-x}{y-2}, \text{ si } y \neq 2.
\end{aligned}$$

La recta tangente es horizontal donde la derivada es cero. Es decir, si:

$$\frac{2-x}{y-2} = 0 \Rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2.$$

Sustituyendo la x en la ecuación que define implícitamente a la función:

$$2^2 + y^2 = 4 \times 2 + 4y \Rightarrow y^2 - 4y - 4 = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{4 \pm \sqrt{16+16}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} 2 + 2\sqrt{2}, \\ 2 - 2\sqrt{2}. \end{cases}$$

Los puntos solicitados son $(2, 2-2\sqrt{2})$ y $(2, 2+2\sqrt{2})$.

□

Ejemplo 6.6.5 *Utilizando derivación implícita calcular y'' en función de x y de y, en la ecuación*

$$x^4 + y^4 = 16\,.$$

▼ Suponemos que $y = \phi(x)$ y calculamos $\dfrac{dy}{dx}$ derivando implícitamente con respecto a x.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^4) + \frac{d}{dx}(y^4) &= \frac{d}{dx}(16)\,;\\
4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx} &= 0\,;\\
4y^3\frac{dy}{dx} &= -4x^3\,;\\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{4x^3}{4y^3} \text{ para } y \neq 0\,;\\
y' &= -\frac{x^3}{y^3}\,.
\end{aligned}$$

De nuevo derivamos con respecto a x para calcular y'':

$$\begin{aligned}
y'' = \frac{d}{dx}y' = \frac{d}{dx}(-\frac{x^3}{y^3}) &= -\frac{y^3\dfrac{d}{dx}x^3 - x^3\dfrac{d}{dx}y^3}{(y^3)^2} =\\
&= -\frac{y^3 \times 3x^2 - x^3 \times 3y^2\dfrac{dy}{dx}}{y^6} = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2\dfrac{dy}{dx}}{y^6}\,.
\end{aligned}$$

Ahora utilizando $y' = -\dfrac{x^3}{y^3}$ se obtiene:

$$y'' = -\frac{3x^2y^3 - 3x^3y^2(-\dfrac{x^3}{y^3})}{y^6} = -\frac{3x^2y^3 + 3x^6y^{-1}}{y^6} =$$

(multiplicando y dividiendo por y)

$$= -\frac{y(3x^2y^3 + 3x^6y^{-1})}{y \times y^6} = -\frac{3x^2y^4 + 3x^6}{y^7}\,.$$

□

Ejemplo 6.6.6 *Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva*

$$\frac{8}{x^2 + y^2} + xy^3 - x^4 = 1$$

en el punto $(2, 2)$.

▼ Efectivamente el punto $(2,2)$ pertenece a la curva, pues sus coordenadas $x = y = 2$ satisfacen la ecuación

$$\frac{8}{2^2+2^2} + 2(2)^3 - 2^4 = \frac{8}{4+4} + 2\times 8 - 16 = \frac{8}{8} + 16 - 16 = 1.$$

Si suponemos que y es función de x, entonces podemos calcular su derivada mediante derivación implícita

$$\frac{d}{dx}[8(x^2+y^2)^{-1} + xy^3 - x^4] = \frac{d}{dx}1;$$
$$8(-1)(x^2+y^2)^{-2}\frac{d}{dx}(x^2+y^2) + \frac{d}{dx}(xy^3) - \frac{d}{dx}x^4 = 0\,,$$

obtenemos

$$\frac{-8(2x+2yy')}{(x^2+y^2)^2} + y^3 + x\times 3y^2y' - 4x^3 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; -16x - 16yy' + (x^2+y^2)^2(y^3+3xy^2y'-4x^3) = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y'[-16y + 3xy^2(x^2+y^2)^2] = 16x - (x^2+y^2)^2(y^3-4x^3) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y' = \frac{16x - (x^2+y^2)^2(y^3-4x^3)}{-16y + 3xy^2(x^2+y^2)^2}\,.$$

Por lo tanto la pendiente de la recta tangente en el punto $(2,2)$ es

$$y'(2,2) = \frac{32 - (4+4)^2(8-32)}{-32 + 24(4+4)^2} = \frac{32 - 64(-24)}{-32 + 24(64)} = \frac{32 + 1\,536}{-32 + 1\,536} = \frac{1\,568}{1\,504} = \frac{49}{47}\,.$$

Luego la ecuación de la recta tangente es

$$y - 2 = \frac{49}{47}(x-2) \;\Rightarrow\; y = \frac{49}{47}x + 2 - \frac{98}{47} \;\Rightarrow\; y = \frac{49}{47}x + \frac{94-98}{47} \;\Rightarrow\; y = \frac{49}{47}x - \frac{4}{47}\,.$$

□

Ejemplo 6.6.7 *Encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva*

$$\sqrt{5-y} + xy^2 = 6$$

en el punto $(4,1)$.

▼ Efectivamente el punto $(4,1)$ pertenece a la curva, pues utilizando $x = 4$ & $y = 1$ se comprueba la identidad

$$\sqrt{5-1} + 4\times 1^2 = \sqrt{4} + 4\times 1 = 2 + 4 = 6.$$

Para hallar la pendiente de la recta tangente, suponemos que y es una función derivable de x; entonces, derivando implícitamente con respecto a x obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(5-y)^{\frac{1}{2}} + \frac{d}{dx}(xy^2) = \frac{d}{dx}6 \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow \; \frac{1}{2}(5-y)^{-\frac{1}{2}}(0-y') + \left[y^2\frac{dx}{dx} + x\frac{d}{dx}y^2\right] = 0 \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow \; \frac{-y'}{2\sqrt{5-y}} + y^2 + 2xyy' = 0 \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow \; \left(\frac{-1}{2\sqrt{5-y}} + 2xy\right) y' = -y^2 \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow \; y' = \frac{-y^2}{\dfrac{-1}{2\sqrt{5-y}} + 2xy}.
\end{aligned}
$$

La pendiente en el punto $(4,1)$ es

$$
y'(4,1) = \frac{-1^2}{\dfrac{-1}{2\sqrt{5-1}} + 2\times 4\times 1} = \frac{-1}{\dfrac{-1}{2\times 2} + 8} = \frac{-1}{\dfrac{31}{4}} = -\frac{4}{31},
$$

por lo tanto, la ecuación de la recta tangente es

$$
y - 1 = -\frac{4}{31}(x-4) \;\Rightarrow\; y = -\frac{4}{31}x + \frac{16}{31} + 1 \;\Rightarrow\; y = -\frac{4}{31}x + \frac{47}{31}.
$$

La pendiente de la recta normal es $\dfrac{31}{4}$ y su ecuación es

$$
y - 1 = \frac{31}{4}(x-4) \;\Rightarrow\; y = \frac{31}{4}x - 30.
$$

□

Ejercicios 6.6.1 *Soluciones en la página 10*

1. Dada la curva definida por $y^3 + 3y^2 = x^4 - 3x^2$.
   a. Obtener la ecuación de su recta tangente en el punto $(-2,1)$.
   b. Calcular las abscisas de los puntos sobre la curva con rectas tangentes horizontales.
2. Dada la curva $2(x^2+y^2)^2 = 25(x^2-y^2)$.
   a. Obtener $\dfrac{dy}{dx} = y'$.
   b. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto $P(3,1)$.
3. Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $\dfrac{4y^2 - 3x^2y}{3-4x^2} = -1$ en el punto $(-1,1)$.

4. Determine la ecuación de la recta tangente a la curva $5x^2y + 8x^4y^2 - 3(y^5 + x^3)^2 = 1$ en el punto $(1, 1)$.
5. Obtenga las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida implícitamente por $(xy^2 + 9)^2 = (y + 2)^{4/3}$ en el punto $(0, 25)$.
6. Encuentre la pendiente de la recta tangente en el punto $P(1, 1)$ de la Lemniscata de Bernoulli
$$(x^2 + y^2)^2 = 4xy\,.$$
7. Encuentre todos los puntos de la curva $x^2y^2 + xy = 2$, donde la recta tangente es horizontal.
8. Encuentre $\dfrac{dy}{dx}$ en la ecuación $y^2(x^2 - 1)^2 + 3(2y^3 - 1)^2 = 0$.
9. Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función definida implícitamente por $3x^2 - x^2\sqrt{y} + y^3 = 3$ en el punto $(1, 1)$.
10. Obtener la ecuación de la recta normal a la curva $\sqrt{3x^2y^3 + 2x^2 - y} = 4 + 2x$ en el punto $(-1, 1)$.
11. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $2x^3y + 3xy^3 = 5$ en el punto $(1, 1)$.
12. Obtener la ecuación de la recta tangente a la curva $x^2y^2 = (y + 1)^2(4 - y^2)$ en el punto $(0, -2)$.
13. Muestre que las rectas tangentes a la elipse $x^2 - xy + y^2 = 3$ en los puntos $(1, -1)$ & $(-1, 1)$ son paralelas.
14. Encontrar la ecuación de la recta tangente a la curva definida por $3x^2 + 5y^2 - 3x^2y^2 = 11$ en el punto $(1, 2)$.
15. Determine las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la curva definida por la ecuación
$$\frac{3x^5}{2y^2 + 1} + \sqrt{x^2 + xy^5} = 4$$
en el punto $(1, 0)$.
16. Encontrar la ecuación de la recta tangente a $2x^2 - 3y^3 + \dfrac{2y}{xy - 1} = -5$ en el punto $(0, 1)$.
17. Encontrar en el punto $(-2, 2)$ la ecuación de la recta tangente a la curva $x^4 + y^3 = 24$.
18. Sea $y = f(x)$ definida implícitamente por $x^4 + 3x^2y + y^3 = 5$. Obtener la ecuación de la recta tangente a la gráfica de esa función en el punto $(-1, 1)$.

Ejercicios 6.6.1 *Derivación implícita, página 8*

1. a. $y = -\dfrac{20}{9}x - \dfrac{31}{9}$;

   b. 3 puntos: $x_1 = -\sqrt{\dfrac{3}{2}}$, $x_2 = 0$ & $x_3 = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

2. a. $\dfrac{d}{dx}[2(x^2 + y^2)^2] = \dfrac{x\left[25 - 4(x^2 + y^2)\right]}{y\left[4(x^2 + y^2) + 25\right]}$;

   b. la recta tangente es: $y = -\dfrac{9}{13}x + \dfrac{40}{13}$.

3. $y = -\dfrac{14}{5}x - \dfrac{9}{5}$.

4. $y = \dfrac{2}{13}x + \dfrac{11}{13}$.

5. $y = \dfrac{5\,625}{2}x + 25$ es la ecuación de la tangente;

   $y = -\dfrac{2}{5\,625}x + 25$ es la ecuación de la normal.

6. -1.

7. No tiene tangentes horizontales.

8. $y' = \dfrac{2xy(1 - x^2)}{(x^2 - 1)^2 + 18y(2y^3 - 1)}$.

9. $y = -\dfrac{8}{5}x + \dfrac{13}{5}$.

10. $y = -\dfrac{4}{9}x + \dfrac{5}{9}$.

11. $y = -\dfrac{9}{11}x + \dfrac{20}{11}$.

12. $y = -2$.

13. Tienen la misma pendiente igual a 1.

14. $y = \dfrac{9}{4}x - \dfrac{1}{4}$.

15. La tangente: $x = 1$ y la normal: $y = 0$.

16. $y = -\dfrac{2}{11}x + 1$.

17. $y = \dfrac{8}{3}x + \dfrac{22}{3}$.

18. $y = \dfrac{5}{3}x + \dfrac{8}{3}$.