**ECUACIONES DIFERENCIALES**
**ECUACIÓN DE BERNOULLI E0100**

Ejemplos.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes

(1) $3(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy(y^3-1)$

(2) $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2}$; $y(1) = 1$

(3) $y^{\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx} + y^{\frac{3}{2}} = 1$; $y(0) = 4$

(4) $e^{-x}(y' - y) = y^2$

(5) $y^2\,dx + (xy - x^3)\,dy = 0$

---

canek.uam.mx: 21/ 4/ 2003.

## Respuestas

Ejemplos.- Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes

(1) $3(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2xy(y^3-1)$

$$\begin{aligned} 3(1+x^2)y' &= 2xy^4 - 2xy \\ 3(1+x^2)y' + 2xy &= 2xy^4 \end{aligned}$$

Dividiendo por $3(1+x^2)$

$$y' + \frac{2x}{3(1+x^2)}y = \frac{2x}{3(1+x^2)}y^4, \text{ que es de Bernoulli.}$$

Multiplicando por $y^{-4}$ se obtiene

$$\text{(A)} \qquad y^{-4}y' + \frac{2x}{3(1+x^2)}y^{-3} = \frac{2x}{3(1+x^2)}$$

Se efectúa un cambio de variable

$$z = y^{-3} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -3y^{-4}\,\frac{dy}{dx} \Rightarrow -\frac{1}{3}z' = y^{-4}y'$$

Sustituyendo en (A)

$$-\frac{1}{3}z' + \frac{2x}{3(1+x^2)}z = \frac{2x}{3(1+x^2)}$$

Multiplicando por $(-3)$

$$z' - \frac{2x}{1+x^2}z = -\frac{2x}{1+x^2}, \text{ que es lineal}$$
$$\int p(x)\,dx = -\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = -\ln(1+x^2) = \ln(1+x^2)^{-1}$$

El factor integrante es

$$e^{\ln(1+x^2)^{-1}} = (1+x^2)^{-1} = \frac{1}{1+x^2}$$

Multiplicando la lineal por el factor integrante

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x^2}\left[z' - \frac{2x}{1+x^2}z\right] &= \frac{2x}{(1+x^2)^2}\\
\left[\frac{1}{1+x^2}z\right]' &= -\frac{2x}{(1+x^2)^2},\ \text{integrando}\\
\frac{1}{1+x^2}z &= -\int (1+x^2)^{-2}\,2x\,dx\\
\frac{1}{1+x^2}z &= -\frac{(1+x^2)^{-1}}{-1} + c,\ c \text{ constante}\\
z &= (1+x^2)\left[\frac{1}{1+x^2} + c\right] = 1 + c(1+x^2)
\end{aligned}$$

pero $z = y^{-3} = \dfrac{1}{y^3}$, entonces

$$\begin{aligned}
\frac{1}{y^3} &= 1 + c(1+x^2),\ \text{de donde}\\
y^3 &= \frac{1}{1+c(1+x^2)},\ \text{por lo tanto}\\
y &= \frac{1}{\sqrt[3]{1+c(1+x^2)}}
\end{aligned}$$

(2) $2\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} - \dfrac{x}{y^2};\ y(1) = 1$

$$2y' - \frac{1}{x}y = -xy^{-2}$$

Dividiendo por 2

$$y' - \frac{1}{2x}y = \frac{x}{2}y^{-2}, \text{ que es de Bernoulli.}$$

Multiplicando por $y^2$ se obtiene

$$y^2y' - \frac{1}{2x}y^3 = -\frac{x}{2} \tag{B}$$

Se efectúa un cambio de variable

$$w = y^3 \Rightarrow \frac{dw}{dx} = 3y^2\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{1}{3}w' = y^2y'$$

Sustituyendo en (B)

$$\frac{1}{3}w' - \frac{1}{2x}w = -\frac{x}{2}$$

Multiplicando por 3

$$w' - \frac{3}{2x}w = -\frac{3}{2}x, \text{ que es lineal}$$
$$\int p(x)\,dx = -\int \frac{3}{2x}\,dx = -\frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} = -\frac{3}{2}\ln x = \ln x^{-\frac{3}{2}}$$

El factor integrante es

$$e^{\ln x^{-\frac{3}{2}}} = x^{-\frac{3}{2}}$$

Multiplicando la lineal por el factor integrante

$$x^{-\frac{3}{2}}\left[w' - \frac{3}{2x}w\right] = -\frac{3}{2}x\,x^{-\frac{3}{2}}$$
$$[x^{-\frac{3}{2}}w]' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Integrando

$$x^{-\frac{3}{2}}w = -\frac{3}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = -\frac{3}{2}(2)x^{\frac{1}{2}} + c, \ c \text{ constante}$$
$$w = x^{\frac{3}{2}}[-3x^{\frac{1}{2}} + c] = -3x^2 + cx^{\frac{3}{2}}$$

Pero $w = y^3$

(3) $y^{\frac{1}{2}}\dfrac{dy}{dx} + y^{\frac{3}{2}} = 1;\ y(0) = 4$

Multiplicando por $y^{-\frac{1}{2}}$

$$y' + y = y^{-\frac{1}{2}}, \text{ que es de Bernoulli}$$

Multiplicando por $y^{\frac{1}{2}}$

(C)
$$y^{\frac{1}{2}}y' + y^{\frac{3}{2}} = 1$$

Efectuando un cambio de variable

$$\text{si } z = y^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{3}{2}y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}z' = y^{\frac{1}{2}}y'$$

Sustituyendo en $(C)$

$$\frac{2}{3}z' + z = 1$$

Multiplicando por $\dfrac{3}{2}$

$$z' + \frac{3}{2}z = \frac{3}{2}, \text{ que es lineal}$$
$$\int p(x)\,dx = \int \frac{3}{2}\,dx = \frac{3}{2}x$$

El factor integrante es $e^{\frac{3}{2}x}$
Multiplicando la lineal por $e^{\frac{3}{2}x}$

$$e^{\frac{3}{2}x}\left[z' + \frac{3}{2}z\right] = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}$$
$$[e^{\frac{3}{2}x}z]' = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}x}$$

Integrando

$$e^{\frac{3}{2}x}z = \int e^{\frac{3}{2}x}\frac{3}{2}\,dx = e^{\frac{3}{2}x} + c, \text{ } c \text{ constante}$$
$$z = e^{-\frac{3}{2}x}[e^{\frac{3}{2}x} + c] = 1 + ce^{-\frac{3}{2}x}$$

Pero $z = y^{\frac{3}{2}}$, entonces

$$y^{\frac{3}{2}} = 1 + ce^{-\frac{3}{2}x}$$

Considerando $y(0) = 4$

$$4^{\frac{3}{2}} = 1 + c, \text{ de donde } c = 7$$

Por lo tanto

$$y^{\frac{3}{2}} = 1 + 7e^{-\frac{3}{2}x}$$

De donde

$$y = (1 + 7e^{-\frac{3}{2}x})^{\frac{2}{3}}$$

(4) $e^{-x}(y' - y) = y^2$
Multiplicando por $e^x$

$$y' - y = e^x y^2, \text{ que es de Bernoulli}$$

Multiplicando por $y^{-2}$

(D) $$y^{-2}y' - y^{-1} = e^x$$

$$w = y^{-1} \Rightarrow \frac{dw}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \Rightarrow -w' = y^{-2}y'$$

Sustituyendo en (D) se obtiene

$$-w' - w = e^x$$

O sea

$$w' + w = -e^x, \text{ que es lineal}$$

El factor integrante es

$$e^{\int dx} = e^x$$

Multiplicando la lineal por $e^x$

$$e^x[w' + w] = -e^x e^x$$
$$[e^x w]' = -e^{2x}$$

Integrando

$$e^x w = -\int e^{2x}\, dx = -\frac{1}{2}e^{2x} + c_1$$

De donde

$$w = e^{-x}\frac{1}{2}[-e^{2x} + 2c_1] = \frac{1}{2}[-e^{x} + ce^{-x}]$$

Pero $w = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$, entonces

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{2}[ce^{-x} - e^{x}]$$

Por lo tanto

$$y = \frac{2}{ce^{-x} - e^{x}}$$

(5) $y^2\,dx + (xy - x^3)\,dy = 0$

$$\begin{aligned} y^2\frac{dx}{dy} + xy - x^3 &= 0 \\ y^2x' + yx &= x^3 \end{aligned}$$

Dividiendo por $y^2$

$$x' + \frac{1}{y}x = \frac{1}{y^2}x^3, \text{ de Bernoulli para } x$$

Multiplicando por $x^{-3}$ se obtiene

$$x^{-3}x' + \frac{1}{y}x^{-2} = \frac{1}{y^2} \tag{E}$$

$$\text{Si } w = x^{-2} \Rightarrow \frac{dw}{dy} = -2x^{-3}\frac{dx}{dy} \Rightarrow -\frac{1}{2}w' = x^{-3}x'$$

Sustituyendo en (E)

$$-\frac{1}{2}w' + \frac{1}{y}w = \frac{1}{y^2}$$

Multiplicando por $(-2)$

$$w' - \frac{2}{y}w = -\frac{2}{y^2}, \text{ que es lineal}$$

El factor integrante es

$$e^{-\int \frac{2}{y}\,dy} = e^{-2\ln y} = e^{lny^2} = y^{-2}$$

Multiplicando la lineal por $y^{-2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} y^{-2}\left[w' - \frac{2}{y}w\right] &= -\frac{2}{y^2}y^{-2} \\ [y^{-2}w]' &= -2y^{-4} \end{aligned}$$

Integrando

$$y^{-2}w = -2\int y^{-4}\,dy = \frac{2}{3}y^{-3} + c_1$$

De donde

$$w = y^2\left[\frac{2}{3y^3} + c_1\right] = y^2\left[\frac{2+3c_1y^3}{3y^3}\right] = \frac{2+cy^3}{3y}$$

Pero $w = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2}$, entonces

$$\frac{1}{x^2} = \frac{2+cy^3}{3y}$$

De donde

$$x^2 = \frac{3y}{2+cy^3}$$