ECUACIONES DIFERENCIALES
EXAMEN GLOBAL E0700

Primera Parte

(1) Resolver detalladamente cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes especificando el método empleado.

(a) $(4x + 3y^3)\,dx + 3xy^2\,dy = 0$

(b) $\dfrac{dy}{dx} + y^3x + y = 0, \quad y(0) = 1$

(c) $y\dfrac{dx}{dy} = x + 4ye^{-\frac{2x}{y}}, \quad y(1) = 1$

(2) Un tanque de 500 litros contiene inicialmente 300 litros de líquido en los que hay disueltos 50 g de sal. Entra líquido que contiene 30 g de sal por litro a una rapidez de 4 litros por minuto. Mediante agitación la mezcla se mantiene uniforme y estando agitada sale del tanque a razón de 2.5 litros por minuto.

(a) Determine la variación del volumen del líquido en el tanque como función del tiempo.
(b) Determine el tiempo que tarda en llenarse el tanque.
(c) Determine la concentración de sal dentro del tanque como función del tiempo.
(d) Calcule la cantidad de sal dentro del tanque en el instante que se desborda.

Segunda Parte

(1) Sea la ecuación diferencial:

$$(x^2 + 1)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

(a) Demuestre que $y_1 = x$ es solución de la ecuación diferencial homogénea. Mediante el procedimiento de reducción de orden calcule la segunda solución y_2 linealmente independiente de la ecuación diferencial homogénea.
(b) Demuestre que $\{y_1, y_2\}$ es un conjunto linealmente independiente de soluciones de la ecuación diferencial homogénea.
(c) Resolver la ecuación diferencial no homogénea por variación de parámetros.

(2) Resolver la ecuación diferencial:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 3x^2 - 4\,\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

por coeficientes indeterminados.

(3) Escriba la solución general de la ecuación diferencial homogénea de orden 10 considerando que las raíces del polinomio característico son:
$1, 1, 2, 3, 1 + i, 1 + i, 1 - i, 1 - i, i, -i.$

canek.azc.uam.mx: 21/ 10/ 2003.

Tercera Parte

(1) Cuando una masa de 2 kg se cuelga de un resorte cuya constante es 32 N/m, llega a la posición de equilibrio. A partir de $t = 0$ se aplica al sistema una fuerza igual a $f(t) = 68e^{-2t}\cos(4t)$. Deduzca la ecuación del movimiento cuando no hay amortiguamiento. Escriba la ecuación del movimiento en la forma $x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \phi) + Be^{-2t}\,\mathrm{sen}(4t + \theta)$. ¿Cuál es la amplitud de las oscilaciones cuando el tiempo es muy grande?

(2) Calcular la carga en el capacitor de un circuito en serie LRC cuando L=0.5 H, R=10 Ω, C=0.001 F, E(t)=150 V, q(0)=1 C, i(0)=0 A. ¿Cuál es la carga en el capacitor cuando ha transcurrido mucho tiempo?