CAPÍTULO

1

Conceptos básicos

1.5 Familias de curvas

Para continuar con el estudio de las soluciones de las ED, daremos en esta sección una interpretación gráfica del conjunto de soluciones para una ED de primer orden dada. Es conveniente anotar que suponemos que una ED de primer orden en algunos casos se puede escribir:

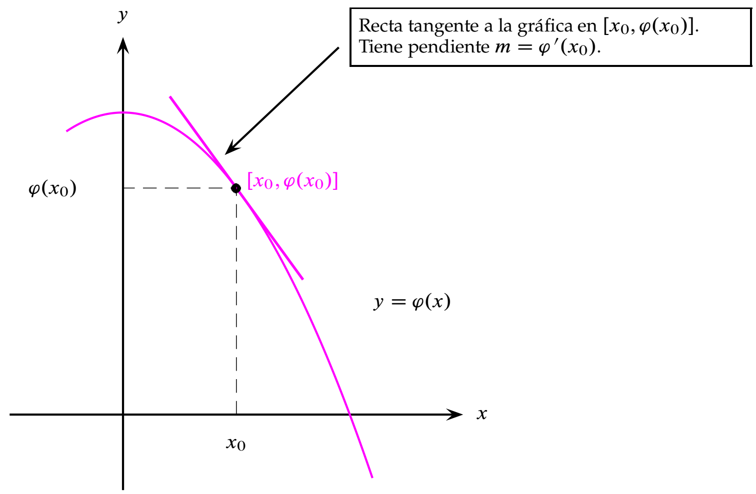
$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

es decir, donde la derivada de la función incógnita ha sido despejada. A esta forma de escribir la ED se llama forma normal.

1.5.1 Interpretación gráfica de $y' = f(x, y)$

En esta sección haremos algunas consideraciones de tipo geométrico con el objetivo de ayudar a comprender mejor las ED y sus soluciones. Para lograr este propósito, es indispensable recordar que la derivada de una función $y = \varphi(x)$ al evaluarse en x_0 representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de dicha función que pasa por el punto $[x_0, \varphi(x_0)]$:

1. canek.azc.uam.mx: 21/ 9/ 2010



Esto ocurre siempre que la derivada exista en ese punto, es decir, que el límite que la define se pueda calcular en x_0. Más aún, conocida la pendiente y el punto por el que pasa la tangente, siempre se puede escribir su ecuación como:

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = m, \quad \text{es decir:} \quad \frac{y - \varphi(x_0)}{x - x_0} = \varphi'(x_0),$$

o mejor:

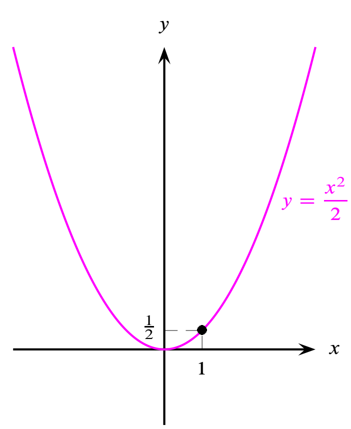
$$y = \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0).$$

Tendremos muchas oportunidades de referirnos a estos hechos en lo que sigue, pero de momento basta con comentar que, si se conociera solamente la derivada $\varphi'(x)$ de una función, esto no sería suficiente para recuperar la función $y = \varphi(x)$, pues sólo se tendría la inclinación (pendiente) de las rectas tangentes, pero no la ubicación de los puntos de la curva. Cuando resolvemos una ED nos encontramos en la misma situación, como se puede apreciar en el siguiente ejemplo.

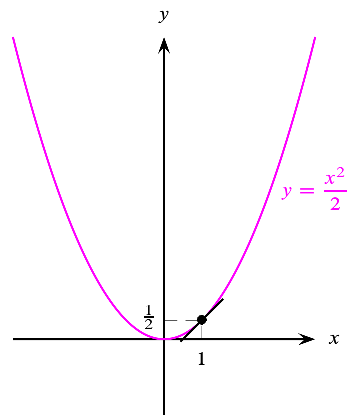
Ejemplo 1.5.1 *Analizar las soluciones de la ecuación diferencial* $y' = x$.

▼ Cuando $x = 1$, tenemos que $y' = 1$, es decir, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto $(1, y)$ es $m = 1$.

Considere la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$, que es una solución de la ecuación diferencial $y' = x$,

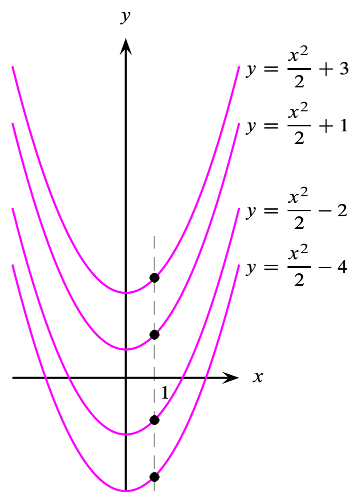


Se observa que la pendiente de la recta tangente a la curva $y = \dfrac{x^2}{2}$ en el punto $\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ es $m = 1$.

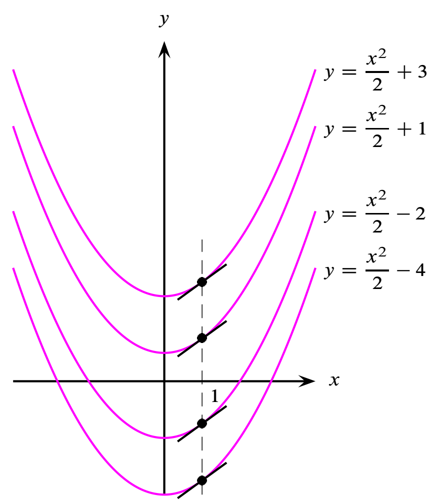


y
$y = \frac{x^2}{2}$
$\frac{1}{2}$
1
x

Otras curvas soluciones de la ED $y' = x$ son las siguientes:



Observe que en todos los puntos con abscisa $x = 1$ sobre las curvas, las pendientes de las rectas tangentes son iguales, es decir, cuando $x = 1 \;\Rightarrow\; y' = 1 = m$.

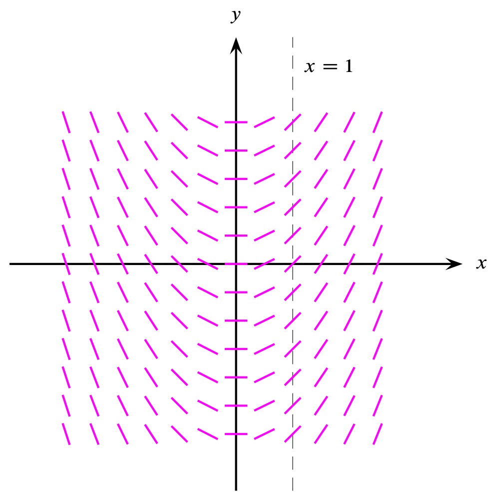


Una solución de la ecuación diferencial $y' = x$ es una función $y = g(x)$ que, cuando pasa por el punto (x, y) del plano, el valor $y' = f(x, y) = x$ proporciona la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la solución en dicho punto.

Si tomamos el punto $(1, 5)$, por ejemplo, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la solución que pasa por este punto es $y' = f(1, 5) = 1$. Este punto se encuentra sobre la recta $x = 1$. En un punto arbitrario sobre esta recta, la solución que pasa por este punto, $(1, y)$, tiene recta tangente con pendiente

$$y'(1, y) = f(1, y) = 1\,.$$

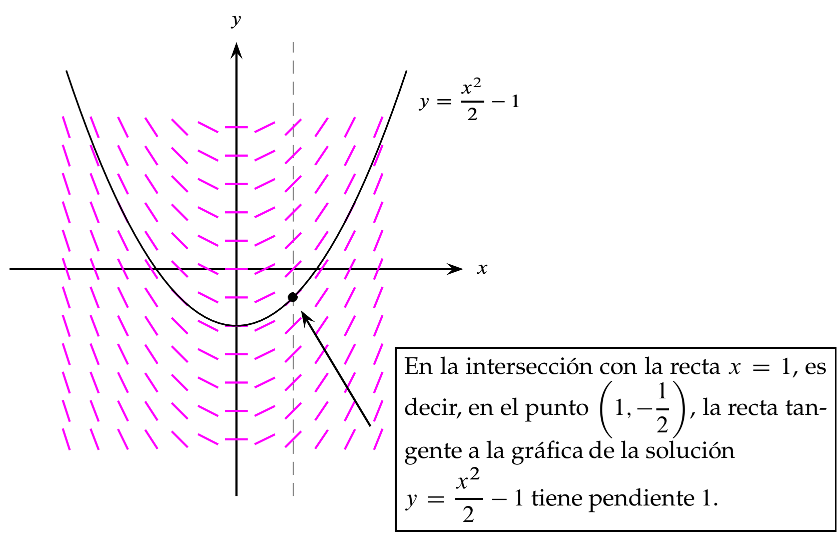
Sobre la recta vertical $x = 1$, todas las soluciones tiene la misma pendiente $m = 1$.



Se ha visto en el curso de Cálculo Integral que la solución general de la ecuación diferencial $y' = x$ es

$$y = \int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C\,.$$

Si dibujamos la gráfica de la única solución (solución particular), que pasa por el punto $(0, -1)$, es decir para la cual $C = -1$, tenemos:



□

Los segmentos de línea mostrados en las dos últimas figuras pretenden dar una idea de cómo se verían las rectas tangentes a cualquier curva solución de la ED; denominamos a estas figuras campo de direcciones, ya que muestran las inclinaciones que deben tener dichas rectas tangentes. Una idea que podría ser fructífera para visualizar las soluciones de una ED es la de trazar de manera aproximada curvas que tengan las tangentes del campo de direcciones.

- Dada la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$.

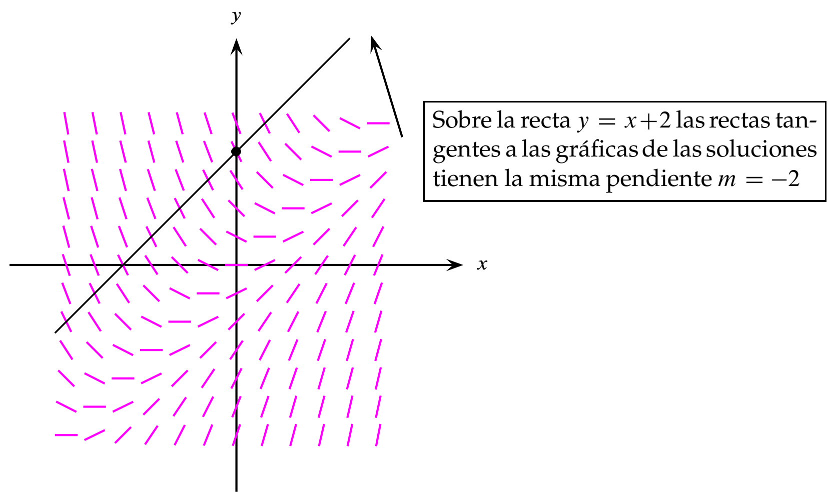
  Se llama isoclina al conjunto de los puntos del plano en donde las rectas tangentes a las gráficas de las soluciones de la ecuación diferencial tienen la misma pendiente. Estos puntos son aquellos que satisfacen $y' = f(x, y) = C$.

  En el ejemplo anterior, la recta vertical $x = 1$ representa una isoclina.

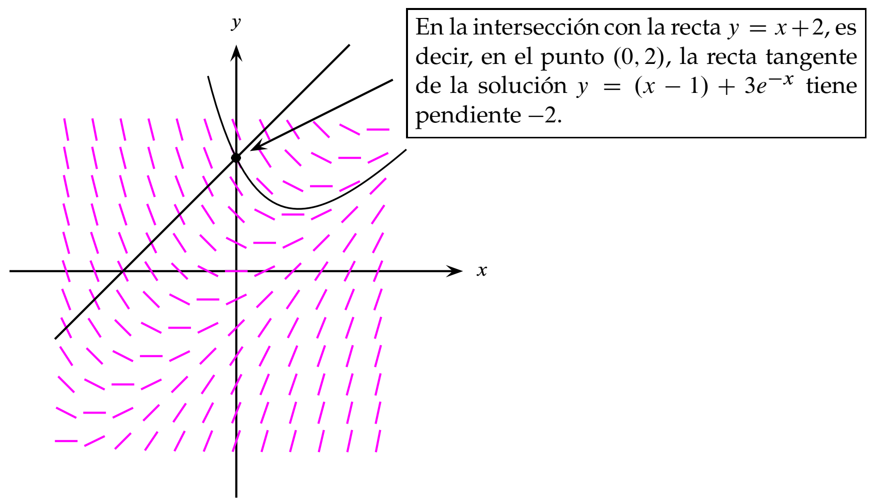
Aplicaremos el concepto recién definido en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.5.2 *Describir el campo de direcciones, las isoclinas y la solución que pasa por el punto* $(0, 2)$ *de la ecuación diferencial:* $\quad y' = -y + x$.

▼ Una solución de esta ecuación diferencial es una función $y = g(x)$ tal que, si pasa por el punto (x, y) del plano, el valor $y' = f(x, y) = -y + x$ proporciona la pendiente de la recta tangente de la gráfica de la solución en dicho punto.
Así, si tomamos el punto del plano $(0, 2)$, en ese punto pasa una solución cuya recta tangente tiene como pendiente $y'(0, 2) = f(0, 2) = -2 + 0 = -2$.
Los puntos del plano en donde la pendiente de la recta tangente de las soluciones es igual a -2 son aquellos que satisfacen $y'(x, y) = f(x, y) = -y + x = -2$, es decir, se encuentran sobre la recta $y = x + 2$.



Como se ha mencionado, más adelante se expondrán los métodos para encontrar la solución general de la ecuación diferencial $y' = -y + x$; por ahora vamos a aceptar que ésta es $y = (x - 1) + Ce^{-x}$. Si dibujamos la gráfica de la única solución que pasa por el $(0, 2)$, es decir $C = 3$, tenemos:



En la figura se ve que la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua de la gráfica de la solución:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} [(x - 1) + 3e^{-x}] = \lim_{x\to\infty} (x - 1).$$

en otras palabras, para x suficientemente grande, $y \approx x - 1$.

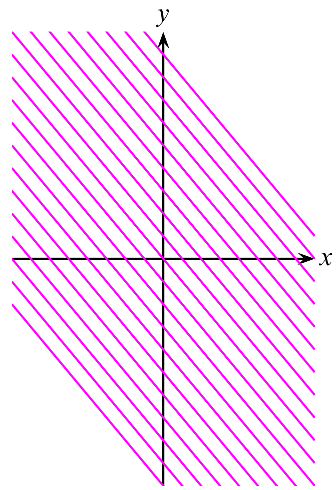
□

Ejemplo 1.5.3 *Analizar las isoclinas de la ED* $\quad y' = f(x, y) = x + y$; *bosquejar algunas curvas solución.*

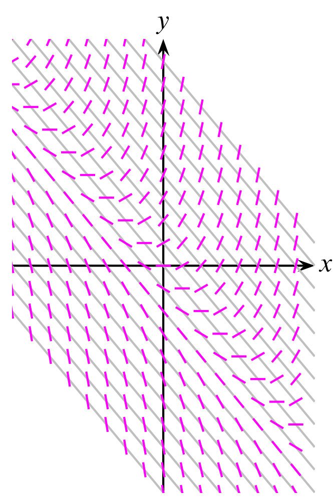
▼ Las isoclinas son simplemente las líneas rectas

$$x + y = C \quad \text{o bien} \quad y = -x + C,$$

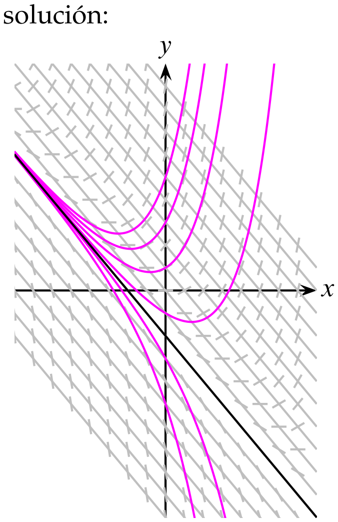
todas con pendiente -1 y el parámetro C nos da sus ordenadas al origen.



Escogiendo algunos puntos en cada isoclina, podemos marcar en esos puntos pequeños segmentos que serán tangentes a las curvas solución:



Ahora podemos trazar algunas curvas solución:



Desde luego, una de las isoclinas, $y = -x - 1$ es también una curva solución, pues para ella se cumple $y' = -1 = x + y$. Esta situación no es muy común, pero llega a ocurrir.

□

Observaciones:

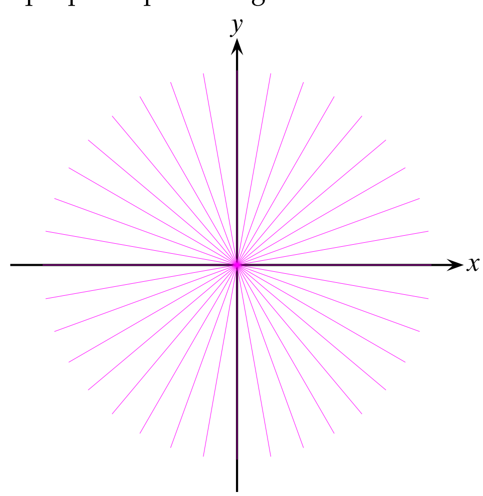
1. Como se mencionó anteriormente, intentar resolver una ED de la manera descrita nos dará solamente una idea aproximada de cómo se ven las soluciones. En el capítulo siguiente se describen métodos analíticos para resolver algunas ED de forma sistemática.
2. En los ejemplos mostrados sobre isoclinas, éstas tienen formas relativamente simples (rectas, círculos, parábolas, etc.) Sin embargo, si las isoclinas se describen mediante ecuaciones más complicadas, un análisis gráfico de las soluciones de una ED puede resultar muy difícil.
3. Aún en los casos sencillos en que se pueden usar las isoclinas con cierta facilidad, hay que prestar especial atención a los casos en que se tiene $y' = 0$ o bien y' queda indefinida, pues entonces las soluciones pueden tener una conducta extraordinaria (como perder la continuidad).

Ejemplo 1.5.4 *Analizar mediante isoclinas algunas soluciones de la ED* $y' = -\dfrac{y}{x}$.

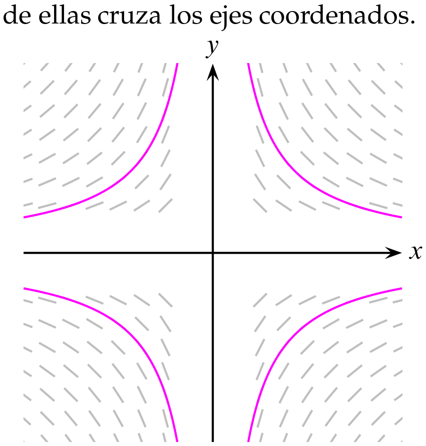
▼ Las isoclinas son

$$-\frac{y}{x} = C \quad \text{o bien} \quad y = -Cx,$$

esto es, simplemente líneas rectas que pasan por el origen.



Sin embargo, notemos que ninguna de ellas se puede definir, para $x = 0$, pues esto nos daría una indefinición $\left(y' = -\dfrac{y}{0}\right)$. Por tanto ninguna curva solución debería cruzar el eje y. De forma análoga, cuando $C = 0$, obtenemos como isoclina $y = 0$, el eje x. La siguiente figura muestra el campo de direcciones y algunas curvas solución. Ninguna de ellas cruza los ejes coordenados.



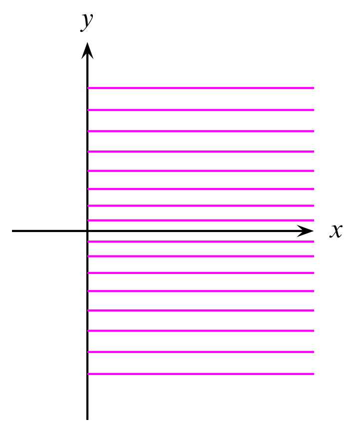
□

Ejemplo 1.5.5 *Analizar gráficamente algunas soluciones de la ED:* $\dfrac{dy}{dx} = 5y^{\frac{4}{5}}$, *para* $x > 0$.

▼ Como en este caso el valor de y' depende sólo de y, las isoclinas son rectas horizontales

$$5y^{\frac{4}{5}} = C \;\Rightarrow\; y = \pm\left(\frac{C}{5}\right)^{\frac{5}{4}}, \text{ para } C \ge 0,$$

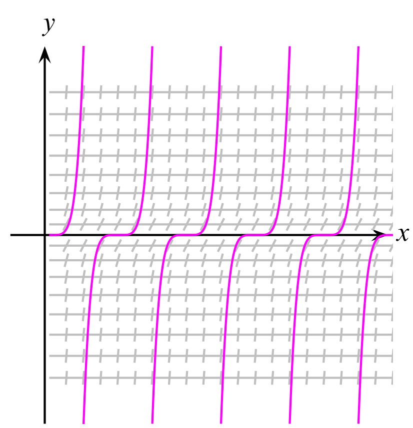
y se ve que las isoclinas son simétricas con respecto al eje horizontal. La gráfica a continuación muestra las isoclinas correspondientes a $C = 0, 2, 5, 10, 15$ y 25.



Notemos que:

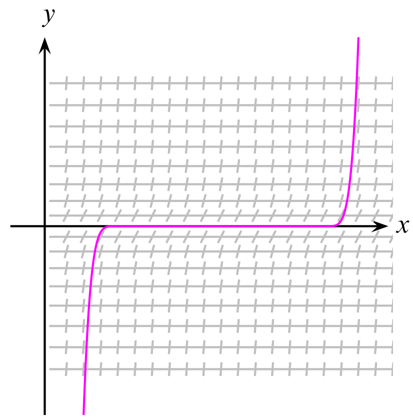
$$y = (x-C)^5 \;\Rightarrow\; y' = 5(x-C)^4 = 5\left(\sqrt[5]{(x-C)^5}\right)^4 = 5\left[(x-C)^5\right]^{\frac{4}{5}} = 5[y]^{\frac{4}{5}}.$$

Es decir, $y = (x-C)^5$ es una familia de soluciones de la ED $y' = 5y^{\frac{4}{5}}$. La figura siguiente muestra algunas curvas solución $y = (x-C)^5$, para $C = 2, 4, 6, 8, 10$ y el campo de direcciones:



Aquí hay que observar necesariamente que cuando una curva solución entra al eje x puede continuar su trayectoria indefinidamente en ese eje o bien salir de él en un punto posterior. La siguiente figura representa este caso para la solución:

$$\widehat{y} = \begin{cases} (x-2)^5, & \text{si } x < 2; \\ 0, & \text{si } 2 \le x \le 4; \\ (x-4)^5, & \text{si } x > 4. \end{cases}$$



En esta ED lo que sucede es que las soluciones no están definidas de manera única para toda $x > 0$. En la siguiente sección se discutirá un poco más detalladamente esta clase de conducta indeseable de las soluciones.

□

Ejercicios 1.5.1 *Interpretación gráfica de $y' = f(x, y)$.* *Soluciones en la página 11*

1. Considere la ED $\dfrac{dy}{dx} = 4\dfrac{x}{y}$.
    a. Encuentre sus isoclinas y trace su campo de direcciones.
    b. Verifique que las rectas $y = \pm 2x$ son curvas solución siempre que $x \neq 0$.
    c. Trace aproximadamente la curva solución que cumple la condición inicial $y(2) = 1$. También trace la curva solución que cumple con $y(1) = 3$.
    d. Analice lo que sucede con las curvas solución del inciso anterior cuando $x \to \pm\infty$.
2. Algunos modelos en ED de la velocidad de un cuerpo en caída libre toman en cuenta la resistencia del aire al movimiento (esta resistencia opone una fuerza proporcional a alguna potencia de la velocidad v), y se representa por una ED de la forma

$$\frac{dv}{dt} = a - bv^k,$$

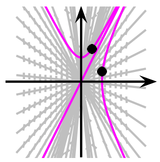
donde a, b, k son constantes.

    a. Haga un esbozo del campo de direcciones para $a = k = 1$ y para $b = \dfrac{1}{10}$.
    b. Con el campo de direcciones anterior, esboce las soluciones que corresponden a las condiciones iniciales $v(0) = 0, 5, 10$ y 15, respectivamente. El valor $v = 10$ se llama a menudo velocidad terminal o bien límite. ¿Puede ver porqué?

Ejercicios 1.5.1 *Interpretación gráfica de* $y' = f(x, y)$. *Página 10*

1. a. Isoclinas: $y = \dfrac{4}{c}x$.

   Campo de direcciones:

   b. Verificar.

   c. Ver la gráfica.

   d. Analizar.

2. a. Las isoclinas son entonces de la forma $1 - \dfrac{v}{10} = c \;\Rightarrow\; v = 10(1 - c)$.

   b. Campo de direcciones y soluciones, para $v(0) = 0, 5, 10, 15$.