CAPÍTULO

1

Conceptos básicos

OBJETIVOS PARTICULARES

- Identificar el orden de una ecuación diferencial (ED) ordinaria.
- Describir el concepto de solución de una ED ordinaria.
- Decidir si una función es o no solución de una ED.
- Distinguir entre una solución general y una solución particular de una ED ordinaria.
- Identificar un problema de valor inicial.

1.1 Introducción

En este primer capítulo se sientan las bases para la presentación de la teoría y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales (ED) ordinarias, que es la materia que nos ocupará principalmente en este libro. Las secciones de este capítulo se encargan de definir con claridad los conceptos más importantes asociados con las ecuaciones diferenciales y sus soluciones, junto con algunas de sus aplicaciones más elementales. En los capítulos siguientes se desarrollarán los métodos necesarios para encontrar dichas soluciones y se ahondará en el tema de las aplicaciones con ejemplos concretos.

Para el lector que se encuentra por primera vez en un curso de ED resulta un tanto confusa la idea de esta clase de ecuaciones. Es muy probable que haya escuchado algunas cosas acerca de las ED, como por ejemplo, que son muy importantes, que aparecen en muchas aplicaciones de ciencia e ingeniería, o que son algo tan difícil de resolver como la cuadratura del círculo. En fin, se dice mucho sobre las ED, pero sólo la experiencia de primera mano nos puede mostrar cuáles de las cosas que hemos oído son ciertas y cuáles son simplemente fama inmerecida.

En la experiencia de los que escriben, las ED representan una herramienta muy valiosa e insustituible para entender el mundo físico, pues ellas llevan en sí algo que no es fácil de manejar o incluso definir por ningún otro medio: el cambio. No hablamos aquí de algo intangible o imaginario que desearíamos que ocurriera en la vida de una persona o de la sociedad, sino de algo que es posible definir y manejar, y que nos servirá

1. canek.azc.uam.mx: 21/ 9/ 2010

para determinar de qué manera una variable (la dependiente) está en función de otra (la independiente) en casos en que esta dependencia sea demasiado complicada.

Cambio de temperatura

Un ejemplo muy sencillo, que puede dar una idea de lo que significa el cambio y cómo modelarlo, se refiere al enfriamiento de un objeto, que puede ser agua hirviendo. Si en casa se hierve agua y luego se deja enfriar, el tiempo que tarda en enfriarse depende de la temperatura del medio circundante. No es igual que el recipiente con agua caliente se deje sobre la hornilla donde se hirvió el agua a que el recipiente se deposite en la tarja de la cocina, o bien, a que en la tarja el recipiente se rodee con pedazos de hielo. Notamos que, cuanto menor es la temperatura del medio circundante, más rápido se enfría el agua. Es decir, se puede observar experimentalmente que la rapidez de cambio de la temperatura del agua está en proporción directa a la diferencia de las temperaturas del agua y del medio circundante.

Concretando, si $T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}$ es la temperatura del agua hirviendo, T_c es la temperatura constante del medio circundante y $T(t)$ es la temperatura del agua después de t minutos, entonces la rapidez de cambio de la temperatura del agua $\left[\dfrac{d}{dt}T(t)\right]$ es directamente proporcional a la diferencia de las temperaturas $[T(t) - T_c]$ del agua y del medio circundante. Esto se puede simbolizar así:

$$\frac{d}{dt}T(t) \quad \alpha \quad [T(t) - T_c],$$

o mejor aún se puede afirmar que:

$$\frac{d}{dt}T(t) = k[T(t) - T_c], \tag{1.1}$$

donde k es una constante, que puede determinarse experimentalmente, denominada constante de proporcionalidad, y que se puede calcular por una lectura de la temperatura del agua (digamos T_1, ocurrida en el instante t_1), diferente a la temperatura inicial $T_0 = 100\,^\circ\mathrm{C}$.

Podemos decir entonces que la temperatura $T(t)$ del agua en el instante $t \geq 0$ debe ser una función que satisfaga a (1.1) y además el par de condiciones iniciales $T(0) = 100$ y $T(t_1) = T_1$.

La igualdad (1.1) es, precisamente, un ejemplo de una ecuación diferencial, donde $T(t)$ es la incógnita.

Caída libre

De acuerdo a la ley de caída libre de los cuerpos, que Galileo investigó y demostró experimentalmente, todos los cuerpos caen en el vacío (en ausencia de aire) sin importar su forma, peso o tamaño, con la misma aceleración uniforme, y de la misma manera; más aún, la distancia recorrida en la caída es proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido en ella.

Este enunciado de la ley de caída libre no es, a pesar de su aparente precisión, tan claro como el razonamiento mediante el cual se obtiene la fórmula que lo caracteriza, usando argumentos de ED que describimos a continuación, y que podrían representar el modo de pensar de Newton sobre este problema: para deducir el modelo, partamos de la suposición de que todos los cuerpos cerca de la superficie de la Tierra caen hacia ella con la misma aceleración y denotemos a esta aceleración constante mediante g; se sabe experimentalmente que, cerca del nivel del mar, $g = -9.81\ \mathrm{m/s^2}$, y usualmente se le da el signo negativo para indicar que nuestro sistema de referencia apunta hacia arriba mientras que la aceleración apunta hacia abajo, hacia el centro de la Tierra.

Supongamos que un cuerpo se encuentra inicialmente a una altura s_0 y que se le imprime una velocidad inicial v_0 que se toma como positiva si apunta hacia arriba o negativa si apunta hacia abajo. Si denotamos por $s(t)$ la altura a la que se encuentra el cuerpo al tiempo t, resultará que su velocidad es $v(t) = s'(t)$ y su aceleración es $a(t) = v'(t) = s''(t)$. La ley de caída libre dice simplemente que

$$s''(t) = g.$$

La anterior es una ED que resume de manera muy concisa el enunciado de la ley de Galileo; mas aún, expresa de forma admirable por su sencillez el hecho de que los cuerpos son atraídos hacia el centro de la

Tierra por una fuerza constante, según la segunda ley del Movimiento de Newton. Dicha fuerza es proporcional a la aceleración, por lo que en esta fórmula se sintetiza un gran conocimiento sobre el movimiento. Para recuperar la ley de Galileo, se puede integrar la fórmula desde 0 hasta t para obtener:

$$\int_0^t s''(\tau)\,d\tau = s'(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = s'(t) - s'(0).$$

Obsérvese que en esta integral, y las siguientes, dentro del integrando se ha sustituido la variable t por τ para evitar que se confunda con el límite superior de integración.

$$\int_0^t s''(\tau)\,d\tau = \int_0^t g\,d\tau = g\tau\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} = gt.$$

Igualando los resultados anteriores:

$$s'(t) - s'(0) = gt.$$

Además, tomando en cuenta que $s'(t) = v(t)$ y también que $v(0) = v_0$, obtenemos:

$$v(t) = s'(t) = s'(0) + gt = v_0 + gt.$$

Ésta es otra ED tan simple como la primera y se puede integrar desde 0 hasta t para darnos

$$\int_0^t s'(\tau)\,d\tau = s(\tau)\Big|_0^t = s(t) - s(0),$$

por una parte, y por otro lado:

$$\int_0^t (v_0 + g\tau)\,d\tau = \left[v_0\tau + g\frac{\tau^2}{2}\right]\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t} = v_0t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Nuevamente, igualando los resultados anteriores obtenemos:

$$s(t) - s(0) = v_0t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Al considerar que $s(0) = s_0$, se obtiene la conocida fórmula del movimiento uniformemente acelerado:

$$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}gt^2.$$

Obsérvese que, si ahora seguimos el razonamiento a la inversa, es decir, derivamos dos veces la fórmula anterior, regresaremos a la ED original:

$$s'(t) = v_0 + gt$$

y también

$$s''(t) = g.$$

Por ese motivo decimos que la función encontrada $s(t)$ resuelve la ED $s''(t) = g$.
De los ejemplos anteriores podemos obtener algunas ideas importantes:

1. Algunas leyes en la física y otras ciencias involucran cantidades como velocidad, aceleración, rapidez, tiempo, por citar algunas, y pueden enunciarse en la forma de una ED.

2. Una ED que sirve para enunciar un resultado de la forma anterior decimos que modela el proceso en cuestión, y entre otras cosas, se caracteriza por ser una ecuación que relaciona a la variable de interés con una o más de sus derivadas.

3. Una vez construido un modelo como en el ejemplo anterior, podemos en algunos casos, obtener la relación entre las variables involucradas en el fenómeno mediante un proceso de solución.

4. Una parte importante del proceso de solución es tener presente ciertas condiciones, como la velocidad inicial y la altura inicial del cuerpo en el ejemplo anterior, que quedarán incorporadas en la expresión final de la función que resuelve la ED.

5. En el ejemplo anterior el proceso de solución consistió simplemente en integrar la ED; de hecho en el proceso de solución generalmente habrá que hacer alguna integración, pero en otros casos podrían requerirse otros procedimientos.

En las secciones siguientes definiremos con toda precisión lo que consideraremos una ecuación diferencial ordinaria, lo que se debe entender por sus soluciones y cómo, al añadir ciertas condiciones adicionales a una ED, es posible determinar una única solución. En los siguientes capítulos nos ocuparemos de los diferentes métodos de solución para ellas.