CAPÍTULO

1

Conceptos básicos

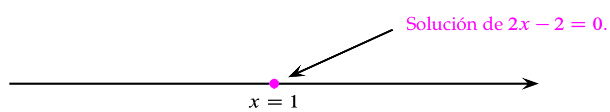
1.3 Soluciones de ecuaciones diferenciales

1.3.1 Soluciones de una ecuación

Ejemplo 1.3.1 *Resolver la ecuación:* $2x - 2 = 0$.

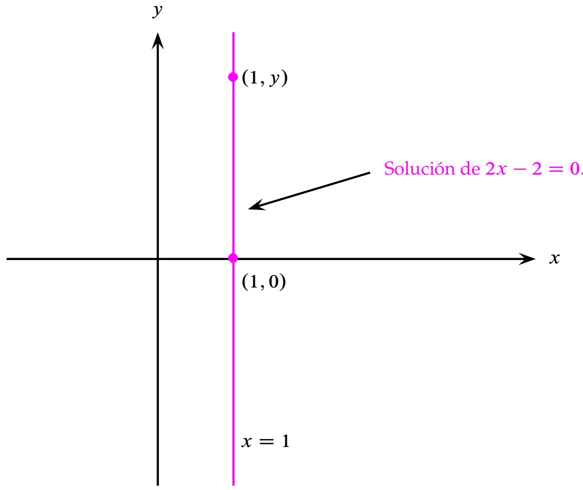
▼ Resolver esta ecuación significa encontrar todos los valores que satisfacen la ecuación. ¿Cuáles son esos valores? Depende en parte del conjunto en donde busquemos (es decir, el universo de trabajo), como se ve a continuación:

1. Si consideramos que $x \in \mathbb{R}$ (el universo de trabajo es la recta real), el conjunto solución consta de un sólo punto $x = 1$. Lo mismo sucede si consideramos como universo de trabajo sólo a los números enteros o bien sólo a los racionales.

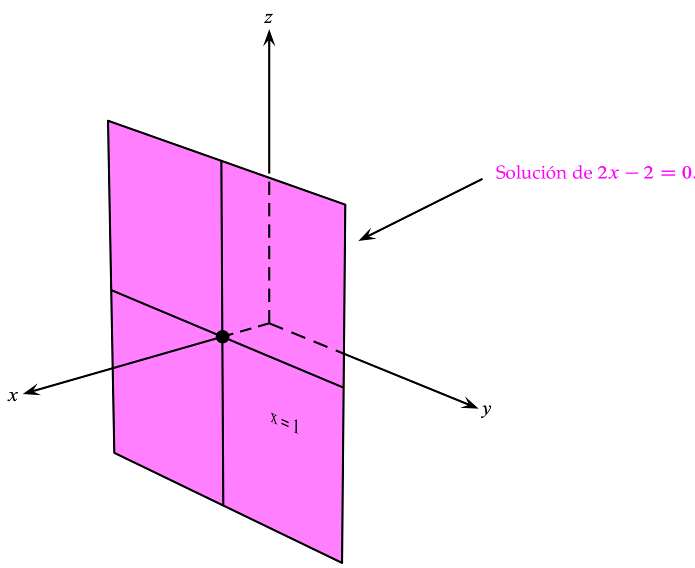


2. Si el universo es ahora el plano $\mathbb{R}^2$, el conjunto solución de $2x - 2 = 0$ consta de todos los puntos (x, y) que pertenecen a la recta $x = 1$, paralela al eje y, que pasa por el punto $(1, 0)$.

1. canek.azc.uam.mx: 21/ 9/ 2010



3. Si el contexto del problema para resolver la ecuación $2x - 2 = 0$ es el espacio $\mathbb{R}^3$, el conjunto solución consta de todos los puntos (x, y, z) que se encuentran en el plano $x = 1$, paralelo al plano yz que pasa por el punto $(1, 0, 0)$.



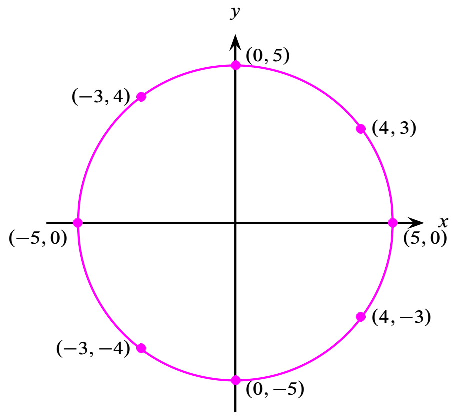
Observe que la solución de la ecuación considerada cambia dependiendo del universo de trabajo.

□

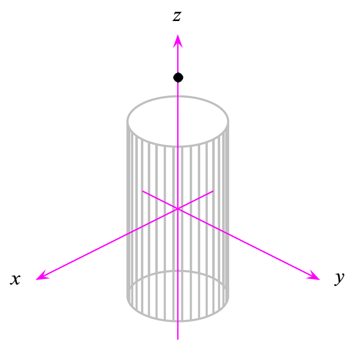
Ejemplo 1.3.2 *Resolver la ecuación:* $x^2 + y^2 = 25$.

▼

1. Si el universo de trabajo es el plano $\mathbb{R}^2$, el conjunto solución de $x^2 + y^2 = 25$ consta de todos los puntos (x, y) que pertenecen a la circunferencia de radio 5 con centro en el origen. La figura siguiente marca algunas de las soluciones como pares de números reales:



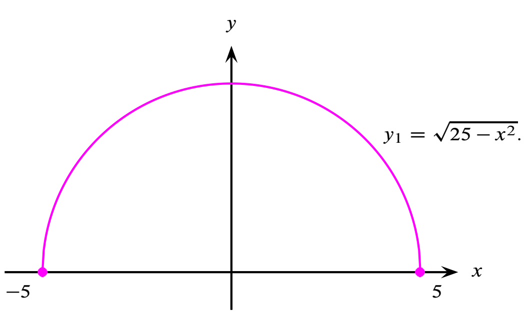
2. Si trabajamos en $\mathbb{R}^3$, el conjunto solución de $x^2 + y^2 = 25$ consta de todos los puntos (x, y, z) que pertenecen al cilindro recto circular de radio 5, con eje de simetría el eje z.

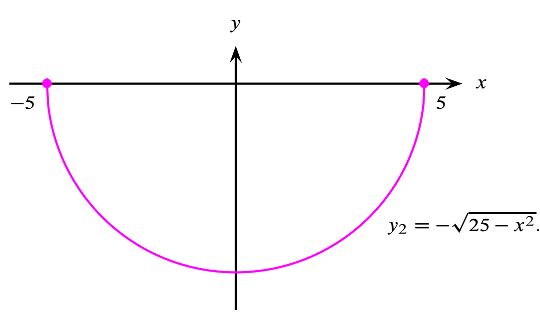


3. Cambiando el enfoque, supongamos que ahora nuestro universo es $\mathfrak{F} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$, el conjunto de las funciones reales de variable real, podemos obtener dos funciones continuas como soluciones de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$, despejando y en función de x (suponiendo que deseamos que la variable independiente sea x).

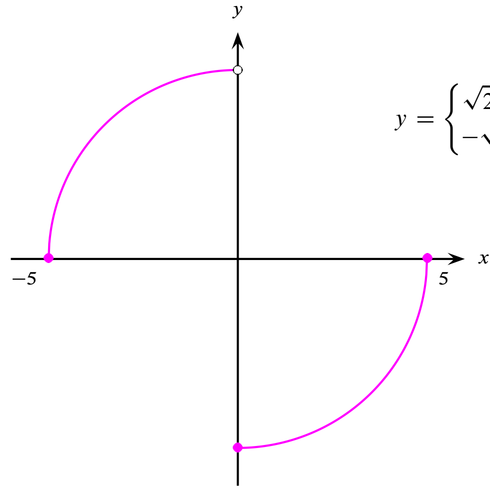
$$x^2 + y^2 = 25 \;\Rightarrow\; y^2 = 25 - x^2 \;\Rightarrow\; \begin{cases} y_1 = \sqrt{25 - x^2} \\ y_2 = -\sqrt{25 - x^2} \end{cases} ; \text{ ambas con dominio } [-5, 5]\,.$$

Las gráficas de estas funciones son las siguientes:





También existen soluciones discontinuas como la siguiente:



$$y = \begin{cases} \sqrt{25-x^2}, & \text{si } -5 \le x < 0; \\ -\sqrt{25-x^2}, & \text{si } 0 \le x \le 5. \end{cases}$$

En los ejercicios y problemas de este libro estaremos buscando por lo general soluciones $f(x) \in \mathfrak{F}$ que sean continuas.

Observe que una función como $g(x) = \sqrt{25-x^2}$, con $-5 \le x \le 0$, también es solución continua de la ecuación $x^2 + y^2 = 25$; sin embargo, en el universo $\mathfrak{F} = \{\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,\}$ se tomarán las soluciones con el dominio más amplio posible. Así, es preferible la solución $h(x) = \sqrt{25-x^2}$, con $-5 \le x \le 5$.

□

De los ejemplos anteriores podemos concluir que una ecuación puede tener una, varias o una infinidad de soluciones y esto depende no sólo de la ecuación en sí, sino también del conjunto en el que buscamos las soluciones.

1.3.2 Solución de una ecuación diferencial

- Una solución de una ecuación diferencial de orden n en un intervalo I es una función definida en dicho intervalo que puede derivarse al menos n veces y que, al sustituirse junto con sus derivadas, satisface a la ED. Esto es, resulta una identidad para los valores de x en el intervalo I.

Ejemplo 1.3.3 *Verificar que las funciones $y = 3x^2 + 7x + Ce^{-4x}$ ($C \in \mathbb{R}$, constante) son soluciones de la ecuación diferencial*

$$y' + 4y = 12x^2 + 34x + 7.$$

▼ Derivamos:

$$y = 3x^2 + 7x + Ce^{-4x} \;\Rightarrow\; y' = 6x + 7 - 4Ce^{-4x}.$$

Utilizando los valores de y & y' en la ecuación diferencial, resulta:

$$\begin{aligned} y' + 4y &= 6x + 7 - 4Ce^{-4x} + 4(3x^2 + 7x + Ce^{-4x}) = \\ &= 6x + 7 - \cancel{4Ce^{-4x}} + 12x^2 + 28x + \cancel{4Ce^{-4x}} = \\ &= 12x^2 + 34x + 7. \end{aligned}$$

La ED se satisface para todos los valores de $x \in \mathbb{R}$.

□

Con mucha frecuencia una solución de una ED puede estar definida de manera implícita como en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1.3.4 *Usando derivación implícita, demostrar que las funciones definidas implícitamente por la ecuación*

$$2xy + 3x^2y^2 = 1,$$

son soluciones de la ecuación diferencial:

$$y' = \frac{-2y - 6xy^2}{2x + 6x^2y}.$$

▼ Derivamos con respecto a x:

$$2xy + 3x^2y^2 = 1 \Rightarrow 2xy' + 2y + 3x^2 2yy' + 6xy^2 = 0.$$

Despejamos y':

$$y'(2x + 6x^2y) = -2y - 6xy^2 \Rightarrow y' = \frac{-2y - 6xy^2}{2x + 6x^2y}.$$

□

Ejemplo 1.3.5 *Encontrar los valores de r de tal manera que la función $y = e^{rx}$ sea solución de la ecuación diferencial:*

$$y'' + 7y' + 12y = 0.$$

▼ Derivamos dos veces:

$$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2e^{rx}.$$

Sustituyendo y, y' & y'' en la ecuación diferencial:

$$r^2e^{rx} + 7re^{rx} + 12e^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}(r^2 + 7r + 12) = 0 \Rightarrow \quad r^2 + 7r + 12 = 0.$$

Observe que aquí hemos cancelado el factor e^{rx}, que es $\neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Factorizando:

$$r^2 + 7r + 12 = (r + 4)(r + 3) = 0.$$

Las soluciones de esta última ecuación son: $r_1 = -4 \quad \& \quad r_2 = -3$.
Tenemos entonces dos soluciones de la ecuación diferencial:

$$y_1 = e^{-4x} \quad \& \quad y_2 = e^{-3x}.$$

□

Ejemplo 1.3.6 *Encontrar los valores de r de tal manera que la función $y = x^r$ sea solución de la ecuación diferencial:*

$$x^2y'' - xy' - 3y = 0.$$

▼ Derivamos dos veces con respecto a x:

$$y = x^r \Rightarrow y' = rx^{r-1} \Rightarrow y'' = r(r-1)x^{r-2}.$$

Sustituyendo y, y' & y'' en la ecuación diferencial, resulta:

$$\begin{aligned} x^2r(r-1)x^{r-2} - xrx^{r-1} - 3x^r &= r(r-1)x^r - rx^r - 3x^r = \\ &= x^r[r(r-1) - r - 3] = x^r(r^2 - r - r - 3) = \\ &= x^r(r^2 - 2r - 3) = 0. \end{aligned}$$

Entonces, suponiendo que $x \neq 0$, se obtiene:

$$r^2 - 2r - 3 = 0 \Rightarrow (r - 3)(r + 1) = 0,$$

y esta última tiene soluciones $r_1 = 3 \quad \& \quad r_2 = -1$. Existen entonces dos soluciones:

$$y_1 = x^3 \quad \& \quad y_2 = x^{-1}.$$

Advierta en este caso que la segunda función no está definida en $x = 0$, así que podemos decir que $y_1 = x^3$ resuelve la ecuación diferencial en el intervalo $(-\infty, \infty)$, mientras que $y_2 = x^{-1}$ resuelve la ecuación diferencial en $(-\infty, 0)$ o bien en $(0, +\infty)$.

□

Es conveniente aclarar, para toda futura referencia lo que queremos decir por resolver.

- Resolver una ecuación diferencial es encontrar todas sus soluciones, es decir, es encontrar su conjunto solución. Siempre que sea posible, al resolver una ecuación diferencial hay que especificar en qué intervalo está definida cada función del conjunto solución.

Advierta que en el ejemplo anterior hicimos lo que se indica: especificar en qué intervalo está definida la función del conjunto solución.

- En el estudio de ED es frecuente interpretar $y' = \dfrac{dy}{dx}$ como el cociente de diferenciales. De esta forma, por ejemplo, si la ED es
$$\frac{dy}{dx} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$
ésta puede ser escrita como:
$$M(x, y)\,dx - N(x, y)\,dy = 0.$$
A esta expresión de la ED la denotaremos como su forma diferencial.

Ejemplo 1.3.7 *Probar que* $\dfrac{x^3}{3} + x + \dfrac{y^2}{2} - 2y = C$ *define implícitamente la solución general de la ED:*
$$(x^2 + 1)\,dx + (y - 2)\,dy = 0.$$

▼ A fin de no recurrir al concepto de derivada, procedemos directamente por diferenciales. Debemos recordar que la diferencial de una función $y = f(x)$ se define mediante:
$$dy = f'(x)\,dx,$$
de lo cual se desprende que las reglas de derivación son idénticas para diferenciales cambiando únicamente la palabra derivada por diferencial. Así, tenemos:
$$d(xy) = x\,dy + y\,dx.$$
Para este ejemplo, calculamos la diferencial de ambos miembros de la solución general. Hallamos
$$d\left(\frac{x^3}{3} + x + \frac{y^2}{2} - 2y\right) = d(C) \ \Rightarrow\ \frac{1}{3}\cdot 3x^2\,dx + dx + \frac{1}{2}\cdot 2y\,dy - 2dy = 0 \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2\,dx + dx + y\,dy - 2\,dy = 0 \ \Rightarrow\ (x^2 + 1)\,dx + (y - 2)\,dy = 0$$
que es la ED propuesta.

□

1.3.3 Tipos de soluciones de ecuaciones diferenciales

Al resolver una ecuación diferencial se encuentran comúnmente dos tipos de soluciones:

1. Una solución particular es la que representa una solución específica de la ecuación diferencial.
   a. En el ejemplo 1.3.6 hemos visto que $y_1 = x^3$ es una solución particular de la ecuación diferencial,
   $$x^2y'' - xy' - 3y = 0,$$
   para todo $x \in \mathbb{R}$.
   b. Análogamente, en el ejemplo 1.3.5 vemos que $y_2 = e^{-3x}$ es una solución particular de
   $$y'' + 7y' + 12y = 0.$$
2. Una solución general representa a una familia de funciones que satisfacen la ecuación diferencial. Esta representación de la familia necesariamente incluye una o varias constantes arbitrarias, como se ve en los siguientes ejemplos:

a. La familia de funciones $y = x^3 + 4x^2 + 2x + C$ ($C \in \mathbb{R}$) es solución general de $y' = 3x^2 + 8x + 2$, como se aprecia de inmediato al derivar.

b. Podemos decir, ampliando el anterior ejemplo, que si
$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$
entonces se tiene que
$$y = F(x) + C$$
es solución general de la ecuación diferencial $y' = f(x)$. En cierta forma la infinidad de soluciones de las ecuaciones diferenciales proviene de este hecho.

c. Las funciones $y_1(x) = A\cos 3x$ & $y_2(x) = B\,\mathrm{sen}\,3x$, para cualesquiera valores de A & B, son ambas soluciones de
$$y'' + 9y = 0,$$
como se comprueba de inmediato al derivar pues $y_1'' = -9A\cos 3x$ & $y_2'' = -9B\,\mathrm{sen}\,3x$, de modo que al sustituir en la ecuación diferencial resulta
$$\begin{aligned} y_1'' + 9y_1 &= -9A\cos 3x + 9A\cos 3x = 0 \quad \text{y similarmente}\\ y_2'' + 9y_2 &= -9B\,\mathrm{sen}\,3x + 9B\,\mathrm{sen}\,3x = 0; \end{aligned}$$
$$y_3 = A\cos 3x + B\,\mathrm{sen}\,3x$$
es solución general de la misma ecuación diferencial.

Además de los tipos anteriores, algunas ecuaciones diferenciales que se encuentran en raras ocasiones en la práctica admiten un tercer tipo de soluciones llamadas singulares, además de la solución general y particular. Tal es el caso por, ejemplo, de la ecuación diferencial
$$y' = 2(x - \sqrt{x^2 - y}).$$
Cuya solución general es
$$y = 2px - p^2,$$
donde p es una constante arbitraria. Por otra parte, si consideramos la función $y = x^2$, nos encontramos con que es otra solución de $y' = 2(x - \sqrt{x^2 - y})$. Lo interesante de este ejemplo es que $y = x^2$ no es una solución particular obtenida de la solución general $y = 2px - p^2$; por tal motivo a $y = x^2$ se le llama una solución singular.

Ejercicios 1.3.1 *Soluciones de ecuaciones diferenciales.*
En cada uno de los siguientes ejercicios se presenta una ecuación diferencial y una función. Verificar que la función es solución de la ED. En cualquier caso, las C (con subíndice o sin él) que aparecen son constantes.

1. $xy' + y = \cos x; \quad y = \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{x}$.
2. $y' - (\tan x)y = 0; \quad y = \dfrac{C}{\cos x}$.
3. $L\dfrac{di}{dt} + Ri = E; \quad i = \dfrac{E}{R} + Ce^{-\frac{R}{L}t}$, donde $L \neq 0$, $R \neq 0$ & E son constantes dadas y C es una constante arbitraria.
4. $yy' = x - 2x^3; \quad y = x\sqrt{1 - x^2}$.
5. $y' = 3y^2; \quad y = -\dfrac{1}{3x + C}$.
6. $x\,\mathrm{sen}\,x\dfrac{dy}{dx} + (\mathrm{sen}\,x + x\cos x)y = xe^x; \quad y = \dfrac{e^x(x-1) + C}{x\,\mathrm{sen}\,x}$.

7. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2x; \quad y = \operatorname{sen} x - 1 + Ce^{-\operatorname{sen} x}$.

8. $x\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1+\sqrt{1-x^2}\right)e^x; \quad y = \left(\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)(e^x + C)$.

9. $y\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 2x\dfrac{dy}{dx} - y = 0; \quad y^2 = 2Cx + C^2$.

10. $y' = e^{(x-y)}; \quad y = \ln(C + e^x)$.

11. $xy\left[1 - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right] = (x^2 - y^2 - a^2)\dfrac{dy}{dx}; \quad y^2 = Cx^2 - \dfrac{a^2C}{1+C}$.

12. $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0; \quad y = \sqrt{x^2 - Cx}$.

13. $(x - y)dx + xdy = 0; \quad y = x(C - \ln x)$.

14. $xy' = y\tan(\ln y); \quad y = e^{\operatorname{arcsen}(Cx)}$.

15. $\dfrac{d^3y}{dx^3} + \dfrac{3}{x}\dfrac{d^2y}{dx^2} = 0; \quad y = C_1x + \dfrac{C_2}{x} + C_3$.

16. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 2k\dfrac{dy}{dx} + k^2y = e^x; \quad y = (C_1 + C_2x)e^{kx} + \dfrac{e^x}{(k-1)^2}$, con k = constante.

17. $(1 - x^2)\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} - A^2y = 0; \quad y = C_1e^{A\operatorname{arcsen} x} + C_2e^{-A\operatorname{arcsen} x}$, donde A es una constante.

18. $y' - y = e^{x+x^2}; \quad y = e^x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt + Ce^x$.

19. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1+x^2}{1+y^2}; \quad x = \dfrac{y+C}{1-Cy}$.

20. $(xy^2)' = xy^3(x^2+1); \quad y = -\dfrac{5}{x^3 + 5x - C\sqrt{x}}$.