CAPÍTULO

# 1

# Conceptos básicos

## 1.4 Condiciones iniciales

De las definiciones y ejemplos de la sección anterior se ve que en general las ecuaciones diferenciales pueden tener una infinidad de soluciones. Entonces podemos preguntarnos: ¿cómo escoger alguna de las soluciones en particular? Las ecuaciones diferenciales servirán para modelar diversas situaciones en ingeniería y ciencias, de modo que la pregunta anterior tiene mucho sentido, pues si para resolver algún problema aplicado se requiere de sólo *una* respuesta del modelo y en lugar de esto encontramos una infinidad de posibles respuestas, aún faltará decidir cuál de ellas resuelve el problema; así pues, se necesita más *información* para decidir.

Por ejemplo, en un problema de caída libre, si un objeto parte desde una altura de 100 m sobre el suelo, en la sección 1.1 hemos visto que su altura estará dada en cada momento $t$ por

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0t + s_0,$$

donde la información dada nos permite ver que $s_0 = 100$ m, pero no se conoce la velocidad inicial $v_0$. La expresión "parte desde una altura de 100 m" nos da la idea de que puede haber un empuje o velocidad al iniciar el experimento, pero no nos da su valor. Así que lo más que podemos decir es que la altura del móvil al tiempo $t$ será $s(t) = -4.9t^2 + v_0t + 100$, y para una respuesta a cualquier pregunta concreta sobre el movimiento necesariamente dependerá del valor $v_0$. Esta cantidad, que debería conocerse para determinar una única solución, es lo que se conoce como una condición inicial.

- Dada una solución $y(t)$ de una ecuación diferencial $F(t, y, y') = 0$, una condición inicial se especifica como $y(t_0) = y_0$. Es decir, la solución $y(t)$ toma el valor $y_0$, para $t = t_0$.

Si una ecuación diferencial puede resolverse para obtener una solución general que contiene una constante arbitraria, bastará con una condición inicial para determinar una solución particular; en casos en que la solución general de una ecuación diferencial contenga dos o más constantes arbitrarias, es de esperarse que se necesiten dos o más condiciones, aunque éstas se pueden dar de varias formas, que revisaremos en su oportunidad.

1. canek.azc.uam.mx: 21/ 9/ 2010

**Ejemplo 1.4.1** *Una solución general de la ecuación diferencial* $yy' - 4x = 0$ *puede escribirse como* $4x^2 - y^2 = C$. *Determinar la solución particular que satisface a la condición* $y(2) = \sqrt{7}$.

▼ Basta con sustituir los valores $x_0 = 2$, $y_0 = \sqrt{7}$ en la solución general para definir un valor de $C$:

$$C = 4(2)^2 - (\sqrt{7})^2 = 16 - 7 = 9.$$

Por tanto, la solución particular buscada es $4x^2 - y^2 = 9$ o bien $y^2 = 4x^2 - 9$, de donde $y = \sqrt{4x^2 - 9}$. Observe que al despejar $y$ hemos hecho una elección en el signo positivo del radical, para que se cumpla efectivamente la condición inicial.

□

- Un problema en el que se tiene una ED y se dan las condiciones iniciales necesarias para determinar una solución particular se denomina un problema de valor inicial, que abreviaremos PVI.

**Ejemplo 1.4.2** *La ecuación diferencial* $y'' + 4y = 0$ *admite a* $y = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t)$ *como solución general. Determine la solución particular que cumple con* $y(0) = 3 \quad \& \quad y'(0) = 8$.

▼

$$y(t) = A\cos(2t) + B\,\mathrm{sen}(2t) \quad \& \quad y(0) = 3 \Rightarrow 3 = A\cos(0) + B\,\mathrm{sen}(0) \Rightarrow A = 3.$$

Para usar la segunda condición requerimos la derivada:

$$y'(t) = -2A\,\mathrm{sen}(2t) + 2B\cos(2t).$$

Así

$$y'(0) = 8 \Rightarrow 8 = -2A\,\mathrm{sen}(0) + 2B\cos(0) \Rightarrow 8 = 2B \Rightarrow B = 4.$$

Tenemos entonces la solución particular:

$$y(t) = 3\cos(2t) + 4\,\mathrm{sen}(2t).$$

□

**Ejercicios 1.4.1** *Condiciones iniciales.* *Soluciones en la página 4*
*En cada uno de los siguientes ejercicios, verificar que la función dada es solución de la ED; después determinar la solución particular que satisfaga al PVI.*

1. $y' + 2y = 0$, con $y(0) = 3$; $\quad y = Ce^{-2x}$.
2. $yy' + x = 0$, con $y(\sqrt{2}) = \sqrt{2}$; $\quad x^2 + y^2 = C$.
3. $y'' + \dfrac{1}{4}y = 0$, con $y(\pi) = 1$ & $y'(\pi) = -1$; $\quad y = A\cos\dfrac{x}{2} + B\,\mathrm{sen}\,\dfrac{x}{2}$.
4. $yy' - \mathrm{sen}\,x = 0$, con $y(\pi) = 1$; $\quad y^2 = C - 2\cos x$.
5. $2y(x+1) + y' = 0$, con $y(-2) = 1$; $\quad y = Ce^{-(x+1)^2}$.
6. $x\dfrac{dy}{dx} + y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, con $y(2) = -3$; $\quad y = \dfrac{C}{x} + \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_2^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.
7. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$, con $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$ & $y''(0) = -1$; $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x}$.
8. $y'' = \dfrac{1}{2y'}$, con $y(1) = 2$ y la tangente en este punto forma con la dirección positiva del eje $x$ un ángulo de $45^\circ$; $y = \pm\dfrac{2}{3}(x + C_1)^{\frac{3}{2}} + C_2$.

9. $y'' - 4y = 0$, con $y(0) = 1$ & $y'(0) = 2$ ;   $y = C_1 \operatorname{senh} 2x + C_2 \cosh 2x$.

10. $2xyy' = x^2 + y^2$, con $y(1) = 3$;  $y^2 = x^2 - Cx$.

11. $y + xy' = x^4(y')^2$, con $y(1) = 0$;  $y = C^2 + \dfrac{C}{x}$.

12. $y' = \dfrac{y^2}{xy - x^2}$, con $y(1) = 1$; $y = Ce^{\frac{y}{x}}$.

13. $\dfrac{x}{2} \cot y \dfrac{dy}{dx} = -1$, con $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$;  $y = \operatorname{arcsen} \dfrac{C}{x^2}$.

14. $e^y\, dx + (xe^y + 2y)\, dy = 0$, con $y(4) = 0$; $xe^y + y^2 = C$.

15. $dx = \dfrac{y}{1 - x^2y^2}\, dx + \dfrac{x}{1 - x^2y^2}\, dy$, con $y(0) = 2$; $\ln \dfrac{1 + xy}{1 - xy} - 2x = C$.

16. $(1 + y^2 \operatorname{sen} 2x)\, dx - 2y \cos^2 x\, dy = 0$, con $y(2\pi) = \sqrt{\pi}$; $x - y^2 \cos^2 x = C$.

17. $[\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y - xe^y]\, dy = [e^y + \cos x \cos y]\, dx$, con $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$; $xe^y + \operatorname{sen} x \cos y = C$.

18. $3x^2(1 + \ln y)\, dx + \left(\dfrac{x^3}{y} - 2y\right) dy = 0$, con $y(2) = 1$; $x^3(1 + \ln y) - y^2 = C$.

19. $\dfrac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3}\, dx + \dfrac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2y}\, dy = 0$, con $y(2) = 1$; $x^2y^2[4y^2 - x^2] = C$.

20. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, con $y'(1) = 2$   &   $y(1) = 3$;   $y = C_1x^2 + C_2x^2 \ln x$.

**Ejercicios 1.4.1** *Condiciones iniciales.* *Página 2*

1. $y = 3e^{-2x}$.
2. $x^2 + y^2 = 4$.
3. $y = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$.
4. $y^2 = -1 - 2\cos x$.
5. $y = e^{-x(x+2)}$.
6. $y = -\frac{6}{x} + \frac{1}{x}\int_2^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.
7. $y = \frac{3}{2}e^x + \frac{1}{6}e^{-x} - \frac{2}{3}e^{2x}$.
8. $y = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{3}$.
9. $y = \operatorname{senh} 2x + \cosh 2x$.
10. $y^2 = x^2 + 8x$.
11. $y = 1 - \frac{1}{x}$, o bien $y = 0$.
12. $y = e^{\frac{y}{x}-1}$.
13. $y = \operatorname{arcsen}\frac{1}{x^2}$.
14. $xe^y + y^2 = 4$.
15. $\ln\left(\frac{1+xy}{1-xy}\right) - 2x = 0$.
16. $x - y^2\cos^2 x = \pi$.
17. $xe^y + \operatorname{sen} x\cos y = 1 + \frac{\pi}{2}$.
18. $x^3(1+\ln y) - y^2 = 7$.
19. $y = \frac{x}{2}$.
20. $y = 3x^2 - 4x^2\ln x$.