CAPÍTULO

2

Métodos de solución de ED de primer orden

2.6 Ecuaciones diferenciales exactas

Antes de abordar este tema, sugerimos al lector revise la última sección de este capítulo, la cual trata sobre algunos conocimientos básicos y necesarios del cálculo de varias variables. Ahí se define la diferencial exacta o total de una función de dos variables $f(x, y)$ de la siguiente manera:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy\,.$$

Comenzamos entonces con una definición básica.

- Una expresión $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta si cumple alguna de las siguientes condiciones equivalentes:
  1. $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ es la diferencial exacta de una función f.
  2. Existe una función $f(x, y)$ tal que $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}\,dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}\,dy = M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$.
  3. Existe una función $f(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$ & $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$.
- Si $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ es una ecuación diferencial exacta, entonces se puede expresar como $df(x, y) = 0$, para alguna función $f(x, y)$, por lo que

  $$df(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; f(x, y) = C\,,$$

  donde C es una constante arbitraria.

  Diremos entonces que $f(x, y) = C$, con $C \in \mathbb{R}$, es la solución general del la ecuación diferencial exacta $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$.

Ejemplo 2.6.1 *Mostrar que la ED* $(3x^2 - y)\,dx + (3y^2 - x)\,dy = 0$ *es exacta y que tiene por solución general* $x^3 - xy + y^3 = C$.

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

▼ En efecto,

$$f(x,y) = x^3 - xy + y^3 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - y \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x + 3y^2 .$$

Luego entonces:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = (3x^2 - y)\,dx + (3y^2 - x)\,dy .$$

Por lo que:

$$(3x^2 - y)\,dx + (3y^2 - x)\,dy = 0 \text{ es una ecuación diferencial exacta.}$$

Su solución general es $f(x,y) = C$. Esto es:

$$x^3 - xy + y^3 = C .$$

□

Ejemplo 2.6.2 *Mostrar que la ED* $(\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x)\,dx + (x\cos y - \cos x)\,dy = 0$ *es exacta y que tiene por solución general* $x \operatorname{sen} y - y\cos x = C$.

▼ En efecto,

$$f(x,y) = x\operatorname{sen} y - y\cos x \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x} = \operatorname{sen} y + y\operatorname{sen} x \;\&\; \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos y - \cos x .$$

Luego entonces:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = (\operatorname{sen} y + y\operatorname{sen} x)\,dx + (x\cos y - \cos x)\,dy = 0 \text{ es una ED exacta .}$$

Su solución general es $f(x,y) = C$. Esto es:

$$x\operatorname{sen} y - y\cos x = C .$$

□

En los dos ejemplos anteriores, sí se conocen la ED y la solución general $f(x,y) = C$. La ED conocida es la ecuación diferencial exacta $df(x,y) = 0$. Sin embargo, usualmente no sucede así. Generalmente, sólo tenemos la ED y buscamos su solución. Por lo tanto:

1. ¿Qué hacer cuando no se conoce la función $f(x,y)$, solución de la ecuación diferencial?
2. ¿Cómo identificar si una ecuación en su forma diferencial es exacta?
3. Y una vez identificada, ¿cómo calcular o determinar la función $f(x,y)$, solución de la ecuación diferencial?

Las respuestas a estas preguntas se ven a continuación:

Teorema 2.1 *Si* $M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, & $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ *son funciones continuas en una región rectangular*

$$R = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; a < x < b \;\&\; \alpha < y < \beta \right\},$$

entonces:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \textit{ es exacta si y sólo si } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x},$$

en cada punto $(x,y) \in R$.

Lo anterior es equivalente a este otro teorema:

Teorema 2.2 *Si* $M(x, y)$, $N(x, y)$, $\dfrac{\partial M}{\partial y}$, & $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ *son funciones continuas en una región rectangular*

$$R = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a < x < b \;\&\; c < y < d \right\},$$

entonces existe $f(x, y)$ *tal que*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \text{ si y sólo si } \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

en cada punto $(x, y) \in R$.

Vamos a dar un esbozo de la demostración de este teorema.

▼

$\Rightarrow$) Si existe $f(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \& \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$, entonces $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

En efecto

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial y} M(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y} f_x = f_{xy}.$$

También

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial}{\partial x} N(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x} f_y = f_{yx}.$$

Pero $f_{xy} = f_{yx}$, por las condiciones de continuidad de la hipótesis del teorema. Por lo tanto:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Esta igualdad es la que nos permite identificar a una ED exacta.

$\Leftarrow$) Si $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$, entonces existe $f(x, y)$ tal que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \& \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$.

▼ Para demostrar la existencia de la función $f(x, y)$, debemos construirla de tal manera que cumpla con las condiciones $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y) \quad \& \quad \dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$.

Partiendo de la primera condición $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x, y)$ e integrando con respecto a x:

$$\int^x \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int^x M(x, y)\, dx \;\Rightarrow\; f(x, y) = \int^x M(x, y)\, dx = P(x, y) + h(y), \tag{2.1}$$

donde $\dfrac{\partial}{\partial x} P(x, y) = M(x, y)$ & $h(y)$ es la constante de integración, que en este caso debe ser una función únicamente de y.

Derivando respecto a y esta función $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[P(x, y) + h(y)\right] = P_y(x, y) + h'(y).$$

Al utilizar la segunda condición $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x, y) \;\Leftrightarrow\; P_y(x, y) + h'(y) = N(x, y) \;\Leftrightarrow\; h'(y) = N(x, y) - P_y(x, y),$$

de donde, integrando con respecto a y:

$$h(y) = \int^{y} \left[N(x,y) - P_y(x,y)\right]\, dy.$$

Finalmente sustituimos $h(y)$ en (2.1), con lo que obtenemos

$$f(x,y) = P(x,y) + \int^{y} \left[N(x,y) - P_y(x,y)\right]\, dy.$$

que es la función buscada. El desarrollo anterior es precisamente el procedimiento que debemos seguir para la obtención de la función $f(x,y)$.

$\square$

Comentarios a la demostración:

1. Para la obtención de $h(y)$, integramos con respecto a y la expresión de $h'(y)$:

$$h'(y) = N(x,y) - P_y(x,y).$$

Al efectuar la integración supusimos que $h'(y)$ sólo depende de y. Comprobemos que esto, en efecto, es cierto. Vamos a verificar que no depende de x demostrando que $\dfrac{\partial}{\partial x} h'(y) = 0$.

$$\begin{aligned} h'(y) &= N(x,y) - P_y(x,y) = \\ &= N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int^{x} M(x,y)\, dx = \\ &= N(x,y) - \int^{x} \frac{\partial}{\partial y} M(x,y)\, dx = \\ &= N(x,y) - \int^{x} M_y(x,y)\, dx. \end{aligned}$$

Estamos considerando que

$$\frac{\partial}{\partial y}\int^{x} \phi(x,y)\, dx = \int^{x} \frac{\partial}{\partial y}\phi(x,y)\, dx;$$

y que

$$\frac{\partial}{\partial x}\int^{x} \phi(x,y)\, dx = \phi(x,y).$$

Derivamos con respecto a x:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} h'(y) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \int^{x} M_y(x,y)\, dx\right] = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} N(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int^{x} M_y(x,y)\, dx = N_x(x,y) - M_y(x,y) = 0. \end{aligned}$$

Ya que, por hipótesis: $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

2. Para la obtención de la función $f(x,y)$ pudimos haber partido de la segunda condición $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, para luego llevar a cabo un desarrollo análogo al realizado:

   a. Integrar $N(x,y)$ con respecto a y para tener $f(x,y)$.
   b. Derivar el resultado del paso anterior con respecto a x para tener $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
   c. Utilizar la primera condición $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$.
   d. Despejar $h'(x)$ de la ecuación anterior.
   e. Integrar respecto a x para obtener $h(x)$.

f. Sustituir $h(x)$ en $f(x,y)$ para así tener la función buscada.

Ejemplo 2.6.3 *Resolver la ED* $(3x^2 - y)\,dx + (3y^2 - x)\,dy = 0.$

▼ Primero verificamos que la ED sea exacta:

$$\begin{aligned}
(3x^2 - y)\,dx + (3y^2 - x)\,dy = 0 &\Rightarrow M = 3x^2 - y \;\&\; N = 3y^2 - x \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow M_y = -1 \;\&\; N_x = -1 \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow M_y = N_x \;\Rightarrow\; \text{la ecuación diferencial es exacta} \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow \text{existe una función } f(x,y) \text{ tal que } df = M\,dx + N\,dy \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow \text{existe una función } f(x,y) \text{ tal que } \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = M\,dx + N\,dy \;\Rightarrow\\
&\Rightarrow \text{existe una función } f(x,y) \text{ tal que } \frac{\partial f}{\partial x} = M \;\&\; \frac{\partial f}{\partial y} = N.
\end{aligned}$$

Luego la resolvemos, es decir, debemos determinar la función $f(x,y)$. Partimos de $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$, e integramos con respecto a x:

$$\begin{aligned}
\int^x \frac{\partial f}{\partial x}\,dx = \int^x M\,dx \;\Rightarrow\; f(x,y) = \int^x M\,dx = \int^x (3x^2 - y)\,dx = \cancel{3}\left(\frac{x^3}{\cancel{3}}\right) - yx + h(y) \;\Rightarrow\\
\Rightarrow f(x,y) = x^3 - xy + h(y). \qquad (2.2)
\end{aligned}$$

Nuestro objetivo ahora es encontrar $h(y)$, para determinar totalmente a $f(x,y)$. Derivamos la expresión anterior con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[x^3 - xy + h(y)] = 0 - x\cdot 1 + h'(y) = -x + h'(y).$$

Utilizamos la condición $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$:

$$-x + h'(y) = 3y^2 - x.$$

Despejamos $h'(y)$:

$$h'(y) = 3y^2.$$

Integrando con respecto a y:

$$h(y) = \int 3y^2\,dy = \cancel{3}\left(\frac{y^3}{\cancel{3}}\right) + C_1 = y^3 + C_1.$$

Sustituimos $h(y)$ en (2.2) para obtener:

$$f(x,y) = x^3 - xy + y^3 + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es

$$f(x,y) = C_2 \;\Rightarrow\; x^3 - xy + y^3 + C_1 = C_2 \;\Rightarrow\; x^3 - xy + y^3 = C.$$

□

Ejemplo 2.6.4 *Resolver la ED* $(\operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x)\,dx + (x\cos y - \cos x)\,dy = 0.$

▼ Primero verificamos que la ED sea exacta:

$$\begin{aligned}
(\operatorname{sen} y + y\operatorname{sen} x)\,dx + (x\cos y - \cos x)\,dy = 0 \;\Rightarrow\; M = \operatorname{sen} y + y\operatorname{sen} x \quad \& \quad N = x\cos y - \cos x \;\Rightarrow\\
\Rightarrow \left.\begin{aligned} M_y &= \cos y + \operatorname{sen} x\\ N_x &= \cos y + \operatorname{sen} x \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_y = N_x \;\Rightarrow\; \text{la ED es exacta} \;\Rightarrow\\
\Rightarrow \text{existe una función } f(x,y) \text{ tal que } \frac{\partial f}{\partial x} = M \;\&\; \frac{\partial f}{\partial y} = N.
\end{aligned}$$

Luego encontramos $f(x, y)$. Partimos de $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ e integramos con respecto a y:

$$\int^y \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = \int^y N\, dy \;\Rightarrow\; f(x, y) = \int^y N\, dy = \int^y (x \cos y - \cos x)\, dy = x \operatorname{sen} y - (\cos x) y + h(x) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f(x, y) = x \operatorname{sen} y - y \cos x + h(x). \tag{2.3}$$

Derivamos con respecto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[x \operatorname{sen} y - y \cos x + h(x)] = \operatorname{sen} y - y(-\operatorname{sen} x) + h'(x).$$

Utilizamos la condición $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ para despejar $h'(x)$:

$$\operatorname{sen} y - y(-\operatorname{sen} x) + h'(x) = \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x \;\Rightarrow\; h'(x) = 0.$$

Integrando:

$$h(x) = C_1.$$

Sustituimos $h(x)$ en (2.3) para obtener:

$$f(x, y) = x \operatorname{sen} y - y \cos x + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es

$$f(x, y) = C_2 \;\Rightarrow\; x \operatorname{sen} y - y \cos x + C_1 = C_2 \;\Rightarrow\; x \operatorname{sen} y - y \cos x = C.$$

□

Ejemplo 2.6.5 *Resolver la ED* $\quad (2e^{2x} \operatorname{sen} 3y + 3e^{2y} \operatorname{sen} 3x)\, dx + (3e^{2x} \cos 3y - 2e^{2y} \cos 3x)\, dy = 0.$

▼ En este caso:

$$M = 2e^{2x} \operatorname{sen} 3y + 3e^{2y} \operatorname{sen} 3x \quad \& \quad N = 3e^{2x} \cos 3y - 2e^{2y} \cos 3x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} M_y &= 2e^{2x}(3 \cos 3y) + (3 \operatorname{sen} 3x) 2e^{2y} &&= 6e^{2x} \cos 3y + 6e^{2y} \operatorname{sen} 3x \\ N_x &= (3 \cos 3y) 2e^{2x} - 2e^{2y}(-3 \operatorname{sen} 3x) &&= 6e^{2x} \cos 3y + 6e^{2y} \operatorname{sen} 3x \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_y = N_x.$$

De lo anterior, la ED es exacta. Entonces existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

Partimos de $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ e integramos con respecto a x:

$$\begin{aligned} \int^x \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int^x M\, dx \;\Rightarrow\; f(x, y) = \int^x M\, dx &= \int^x (2e^{2x} \operatorname{sen} 3y + 3e^{2y} \operatorname{sen} 3x)\, dx = \\ &= (\operatorname{sen} 3y) \int e^{2x}\, 2\, dx + e^{2y} \int (\operatorname{sen} 3x)\, 3\, dx = \\ &= (\operatorname{sen} 3y) e^{2x} + e^{2y}(-\cos 3x) + h(y) \;\Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\; f(x, y) = e^{2x} \operatorname{sen} 3y - e^{2y} \cos 3x + h(y). \tag{2.4}$$

Derivamos con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}(\cos 3y) 3 - (\cos 3x) 2e^{2y} + h'(y).$$

Utilizamos la condición $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ para despejar $h'(y)$:

$$3e^{2x}\cos 3y - 2e^{2y}\cos 3x + h'(y) = 3e^{2x}\cos 3y - 2e^{2y}\cos 3x \;\Rightarrow\; h'(y) = 0.$$

Integrando:

$$h(y) = C_1.$$

Sustituimos $h(y)$ en (2.4) para obtener:

$$f(x, y) = e^{2x}\operatorname{sen} 3y - e^{2y}\cos 3x + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es

$$f(x, y) = C_2 \;\Rightarrow\; e^{2x}\operatorname{sen} 3y - e^{2y}\cos 3x + C_1 = C_2 \;\Rightarrow\; e^{2x}\operatorname{sen} 3y - e^{2y}\cos 3x = C.$$

□

Ejemplo 2.6.6 *Resolver la ED* $\quad (ye^{xy} + 2x - 1)\,dx + (xe^{xy} - 2y + 1)\,dy = 0.$

▼ Verificamos que la ED sea exacta:

$$\left.\begin{aligned} M &= ye^{xy} + 2x - 1 \;\Rightarrow\; M_y = y(e^{xy}x) + e^{xy}(1) = e^{xy}(xy + 1) \\ N &= xe^{xy} - 2y + 1 \;\Rightarrow\; N_x = x(e^{xy}y) + e^{xy}(1) = e^{xy}(xy + 1) \end{aligned}\right\} \Rightarrow M_y = N_x \;\Rightarrow\; \text{la ED es exacta.}$$

Entonces existe una función $f(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

Partimos de $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ e integramos con respecto a y:

$$\int^y \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = \int^y N\,dy \;\Rightarrow\; f(x, y) = \int^y N\,dy = \int^y (xe^{xy} - 2y + 1)\,dy = \int^y (e^{xy}x - 2y + 1)\,dy \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; f(x, y) = e^{xy} - y^2 + y + h(x). \tag{2.5}$$

Derivamos con respecto a x:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[e^{xy} - y^2 + y + h(x)] = e^{xy}y + h'(x).$$

Utilizamos la condición $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ para despejar $h'(x)$:

$$ye^{xy} + h'(x) = ye^{xy} + 2x - 1 \;\Rightarrow\; h'(x) = 2x - 1.$$

Integrando:

$$h(x) = \int (2x - 1)\,dx = x^2 - x + C_1.$$

Sustituimos $h(x)$ en (2.5) para obtener:

$$f(x, y) = e^{xy} - y^2 + y + x^2 - x + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es

$$f(x, y) = C_2 \;\Rightarrow\; e^{xy} - y^2 + y + x^2 - x + C_1 = C_2 \;\Rightarrow\; e^{xy} - y^2 + y + x^2 - x = C.$$

□

Ejemplo 2.6.7 *Determinar el valor de la constante k de modo que resulte exacta la siguiente ecuación diferencial:*

$$(kx^2y + e^y)\,dx + (x^3 + xe^y - y)\,dy = 0.$$

▼ Para esta ED se tiene que

$$\begin{aligned} M &= kx^2y + e^y \quad \Rightarrow \; M_y = kx^2 + e^y. \\ N &= x^3 + xe^y - y \;\Rightarrow\; N_x = 3x^2 + e^y. \end{aligned}$$

La ecuación diferencial es exacta si se cumple

$$M_y = N_x \;\Rightarrow\; kx^2 + e^y = 3x^2 + e^y \;\Rightarrow\; kx^2 = 3x^2 \;\Rightarrow\; k = 3.$$

Por lo tanto la ecuación diferencial es exacta cuando $k = 3$.

□

Ejemplo 2.6.8 *Obtener alguna función $M(x, y)$ de modo que la siguiente ecuación diferencial sea exacta:*

$$M(x, y)\,dx + (x^3 + xe^y - y)\,dy = 0.$$

▼ Partimos del conocimiento de la función $N(x, y)$:

$$N = x^3 + xe^y - y \;\Rightarrow\; N_x = 3x^2 + e^y.$$

La ecuación diferencial es exacta si cumple:

$$M_y = N_x \;\Rightarrow\; \frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + e^y.$$

Entonces, integrando esta última expresión con respecto a y:

$$\int^y \frac{\partial M}{\partial y}\,dy = \int^y (3x^2 + e^y)\,dy \;\Rightarrow\; M(x, y) = \int^y (3x^2 + e^y)\,dy = 3x^2y + e^y + h(x).$$

Donde $h(x)$ es cualquier función de x, esto es, que no dependa de y.
$M(x, y)$ podría ser, entre otras funciones:

$$\begin{aligned} M(x, y) &= 3x^2y + e^y + \arctan x; && \text{donde } h(x) = \arctan x. \\ M(x, y) &= 3x^2y + e^y + x\ln x; && \text{donde } h(x) = x\ln x. \\ M(x, y) &= 3x^2y + e^y + C; && \text{donde } h(x) = C. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6.9 *Determinar alguna función $N(x, y)$ de modo que la siguiente ecuación diferencial sea exacta:*

$$(y^2\cos x - 3x^2y - 2x)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

▼ Partimos del conocimiento de la función $M(x, y)$:

$$M = y^2\cos x - 3x^2y - 2x \;\Rightarrow\; M_y = 2y\cos x - 3x^2.$$

La ecuación diferencial es exacta si cumple:

$$M_y = N_x \;\Rightarrow\; \frac{\partial N}{\partial x} = 2y\cos x - 3x^2.$$

Entonces, integrando con respecto a x:

$$\int^x \frac{\partial N}{\partial x}\,dx = \int^x (2y\cos x - 3x^2)\,dx \;\Rightarrow\; N(x, y) = \int^x (2y\cos x - 3x^2)\,dx = 2y\,\mathrm{sen}\,x - x^3 + h(y).$$

Donde $h(y)$ es cualquier función de y, esto es, no depende de x.
$N(x,y)$ podría ser, entre otras funciones, cualquiera de las siguientes:

$$\begin{array}{ll} N(x,y) = 2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y; & \text{donde } h(y) = \ln y. \\ N(x,y) = 2y \operatorname{sen} x - x^3 - ye^y; & \text{donde } h(y) = -ye^y. \\ N(x,y) = 2y \operatorname{sen} x - x^3 + C; & \text{donde } h(y) = C. \end{array}$$

□

Ejemplo 2.6.10 *Resolver el siguiente PVI:*

$$3y^2 + 2y \operatorname{sen} 2x = \left(\cos 2x - 6xy - \frac{4}{1+y^2}\right) y', \text{ con } y(0) = 1.$$

▼ Primero obtenemos la solución general de la ecuación diferencial y luego aplicamos la condición inicial:

$$\begin{aligned} & 3y^2 + 2y \operatorname{sen} 2x = \left(\cos 2x - 6xy - \frac{4}{1+y^2}\right) y' \Rightarrow \\ & \Rightarrow 3y^2 + 2y \operatorname{sen} 2x = \left(\cos 2x - 6xy - \frac{4}{1+y^2}\right) \frac{dy}{dx} \Rightarrow \\ & \Rightarrow (3y^2 + 2y \operatorname{sen} 2x)\, dx - \left(\cos 2x - 6xy - \frac{4}{1+y^2}\right) dy = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow (3y^2 + 2y \operatorname{sen} 2x)\, dx + \left(6xy - \cos 2x + \frac{4}{1+y^2}\right) dy = 0. \end{aligned}$$

Tenemos entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} M = 3y^2 + 2y \operatorname{sen} 2x & \Rightarrow M_y = 6y + 2 \operatorname{sen} 2x \\ N = 6xy - \cos 2x + \dfrac{4}{1+y^2} & \Rightarrow N_x = 6y + 2 \operatorname{sen} 2x \end{array}\right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{ la ED es exacta } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ existe una función } f(x,y) \text{ tal que } \frac{\partial f}{\partial x} = M \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = N.$$

Partimos de $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M$ e integramos con respecto a x:

$$\int^x \frac{\partial f}{\partial x}\, dx = \int^x M\, dx \Rightarrow f(x,y) = \int^x M\, dx = \int^x (3y^2 + 2y \operatorname{sen} 2x)\, dx = 3y^2x + y(-\cos 2x) + h(y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x,y) = 3y^2x + y(-\cos 2x) + h(y). \tag{2.6}$$

Derivamos con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[3y^2x + y(-\cos 2x) + h(y)] = 6xy - \cos 2x + h'(y).$$

Utilizamos la condición $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N$ para despejar $h'(y)$:

$$6xy - \cos 2x + h'(y) = 6xy - \cos 2x + \frac{4}{1+y^2} \Rightarrow h'(y) = \frac{4}{1+y^2}.$$

Integrando:

$$h(y) = \int \frac{4}{1+y^2}\, dy = 4 \arctan y + C_1.$$

Sustituimos $h(y)$ en (2.6) para obtener:

$$f(x,y) = 3xy^2 - y\cos 2x + 4\arctan y + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta es

$$\begin{aligned} f(x,y) = C_2 \;\Rightarrow 3xy^2 - y\cos 2x + 4\arctan y + C_1 = C_2 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow 3xy^2 - y\cos 2x + 4\arctan y = C. \end{aligned}$$

Finalmente se aplica la condición inicial $y(0) = 1 \;\Rightarrow\; y = 1 \;\&\; x = 0$:

$$3(0)1^2 - 1\cos 0 + 4\arctan 1 = C \;\Rightarrow\; 0 - 1 + 4\Big(\frac{\pi}{4}\Big) = C \;\Rightarrow\; C = \pi - 1.$$

Por lo tanto la solución del PVI es

$$3xy^2 - y\cos 2x + 4\arctan y = \pi - 1.$$

□

Ejemplo 2.6.11 *Resolver la ED* $\quad y\cos x + 2xe^y + 1 + (\operatorname{sen} x + x^2e^y + 2y - 3)y' = 0.$

▼ Se tiene que

$$(y\cos x + 2xe^y + 1)\,dx + (\operatorname{sen} x + x^2e^y + 2y - 3)\,dy = 0. \tag{2.7}$$

Entonces:

$$\left.\begin{aligned} M &= y\cos x + 2xe^y + 1 &&\Rightarrow\; M_y = \cos x + 2xe^y \\ N &= \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2y - 3 &&\Rightarrow\; N_x = \cos x + 2xe^y \end{aligned}\right\} \Rightarrow\; M_y = N_x, \text{ entonces (2.7) es una ED exacta.}$$

Por lo tanto, existe $f(x,y)$ tal que $f_x = M \;\;\&\; f_y = N$.

Partiendo de

$$f_x = M = y\cos x + 2xe^y + 1.$$

Integrando con respecto a x:

$$\begin{aligned} &\int^x f_x\,dx = \int^x M\,dx \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; f(x,y) = \int^x M\,dx = \int^x (y\cos x + 2xe^y + 1)\,dx = y\int^x \cos x\,dx + 2e^y\int x\,dx + \int dx \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; f(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y + x + h(y). \end{aligned} \tag{2.8}$$

Derivando parcialmente con respecto a y:

$$f_y = \operatorname{sen} x + x^2e^y + h'(y).$$

Utilizando la condición $f_y = N$ para despejar $h'(y)$:

$$f_y = N = \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2y - 3,$$

hallamos que

$$\operatorname{sen} x + x^2e^y + h'(y) = \operatorname{sen} x + x^2e^y + 2y - 3 \;\Rightarrow\; h'(y) = 2y - 3.$$

Integrando:

$$h(y) = y^2 - 3y + C_1.$$

Sustituyendo $h(y)$ en (2.8), obtenemos:

$$f(x,y) = y\operatorname{sen} x + x^2e^y + x + y^2 - 3y + C_1.$$

Entonces la solución general de la ED dada es

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = C_2 \;&\Rightarrow y\,\text{sen}\,x + x^2e^y + x + y^2 - 3y + C_1 = C_2 \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow y\,\text{sen}\,x + x^2e^y + x + y^2 - 3y = C.
\end{aligned}
$$

□

Ejemplo 2.6.12 *Resolver el PVI* $(2xy + 2y^2e^{2x} - \text{sen}\,x)\,dx + (x^2 + 2ye^{2x} + \ln y)\,dy = 0,$ *con* $y(0) = 1$.

▼ Se tiene:

$$
\left.\begin{array}{ll}
M = 2xy + 2y^2e^{2x} - \text{sen}\,x & \Rightarrow M_y = 2x + 4ye^{2x} \\
N = x^2 + 2ye^{2x} + \ln y & \Rightarrow N_x = 2x + 4ye^{2x}
\end{array}\right\} \Rightarrow M_y = N_x; \text{ entonces la ED es exacta.}
$$

Por lo tanto existe $f(x,y)$, tal que $f_x = M$ & $f_y = N$.

Partiendo de

$$f_y = N = x^2 + 2ye^{2x} + \ln y.$$

Integrando con respecto a y:

$$
\begin{aligned}
&\int^y f_y\,dy = \int^y N\,dy \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow f(x,y) = \int^y N\,dy = \int^y (x^2 + 2ye^{2x} + \ln y)\,dy = x^2\int dy + 2e^{2x}\int y\,dy + \int \ln y\,dy \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow f(x,y) = x^2y + y^2e^{2x} + y\ln y - y + h(x). \qquad (2.9)
\end{aligned}
$$

Derivando parcialmente con respecto a x:

$$f_x = 2xy + 2y^2e^{2x} + h'(x).$$

Utilizando la condición $f_x = M$, para despejar $h'(x)$:

$$
\begin{aligned}
2xy + 2y^2e^{2x} + h'(x) = 2xy + 2y^2e^{2x} - \text{sen}\,x \;\Rightarrow \\
\Rightarrow h'(x) = -\,\text{sen}\,x \;\Rightarrow\; h(x) = \cos x + C_1.
\end{aligned}
$$

Sustituyendo $h(x)$ en (2.9), se obtiene:

$$f(x,y) = x^2y + y^2e^{2x} + y\ln y - y + \cos x + C_1,$$

entonces la solución general de la ED es

$$
\begin{aligned}
f(x,y) = C_2 \;&\Rightarrow x^2y + y^2e^{2x} + y\ln y - y + \cos x + C_1 = C_2 \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow x^2y + y^2e^{2x} + y\ln y - y + \cos x = C.
\end{aligned}
$$

Considerando la condición inicial $y(0) = 1 \;\Rightarrow\; x = 0$ & $y = 1$, se obtiene:

$$0^2\cdot 1 + 1^2e^0 + 1\ln(1) - 1 + \cos(0) = C \;\Rightarrow\; 0 + 1 + 0 - 1 + 1 = C \;\Rightarrow\; C = 1.$$

Por lo tanto, la solución del PVI es

$$x^2y + y^2e^{2x} + y\ln y - y + \cos x = 1.$$

□

Ejemplo 2.6.13 *Resolver la ED* $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{ax+by}{bx+cy}$, *con* a, b & c *constantes.*

▼

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by}{bx+cy} \Rightarrow (bx+cy)\,dy = -(ax+by)\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (ax+by)\,dx + (bx+cy)\,dy = 0.$$

Se tiene que

$$\left.\begin{array}{l} M = ax+by \Rightarrow \quad M_y = b \\ N = bx+cy \Rightarrow \quad N_x = b \end{array}\right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{ la ED es exacta.}$$

Entonces existe $f(x, y)$ tal que $f_x = M$ & $f_y = N$. De $f_x = M$ se obtiene al integrar:

$$f(x.y) = \int^x M\,dx = \int^x (ax+by)\,dx = a\frac{x^2}{2} + byx + h(y). \tag{2.10}$$

Derivando parcialmente con respecto a y:

$$f_y = bx + h'(y).$$

Utilizando la condición $f_y = N$ para despejar $h'(y)$:

$$bx + h'(y) = bx + cy \Rightarrow h'(y) = cy \Rightarrow h(y) = c\frac{y^2}{2} + K_1.$$

Sustituyendo $h(y)$ en (2.10):

$$f(x, y) = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + K_1.$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$\frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2 + K_1 = K_2 \Rightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2K_1 = 2K_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ax^2 + 2bxy + cy^2 = K.$$

□

Ejemplo 2.6.14 *Resolver la ED* $(e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x)\,dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = 0.$

▼ Se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} M = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x \Rightarrow M_y = e^x \cos y - 2 \operatorname{sen} x \\ N = e^x \cos y + 2\cos x \Rightarrow N_x = e^x \cos y - 2 \operatorname{sen} x \end{array}\right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{ la ED es exacta.}$$

Entonces existe $f(x, y)$ tal que $f_x = M$ & $f_y = N$. De $f_y = N$, se obtiene al integrar con respecto a y:

$$f(x, y) = \int^y N\,dy = \int^y (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x + h(x) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x + h(x). \tag{2.11}$$

Derivando parcialmente con respecto a x:

$$f_x = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x + h'(x).$$

Utilizando $f_x = M$ para despejar $h'(x)$:

$$e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x + h'(x) = e^x \operatorname{sen} y - 2y \operatorname{sen} x \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = C_1.$$

Sustituyendo $h(x)$ en (2.11), se obtiene:

$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x + C_1.$$

Por lo tanto la solución general es

$$\begin{aligned} f(x, y) = C_2 \ &\Rightarrow e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x + C_1 = C_2 \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^x \operatorname{sen} y + 2y\cos x = C. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.6.15 *Resolver la ED* $(ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x)\,dx + (xe^{xy}\cos 2x - 3)\,dy = 0.$

▼ Se tiene:

$$\left.\begin{aligned} M &= ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x \quad &\Rightarrow M_y = (yxe^{xy} + e^{xy})\cos 2x - 2xe^{xy}\operatorname{sen} 2x \\ N &= xe^{xy}\cos 2x - 3 &\Rightarrow N_x = (xye^{xy} + e^{xy})\cos 2x - 2xe^{xy}\operatorname{sen} 2x \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_y = N_x \ \Rightarrow \ \text{la ED es exacta.}$$

Entonces existe $f(x, y)$ tal que $f_x = M$ & $f_y = N$. Integrando con respecto a y la última igualdad:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \int^y N\,dy = \int^y (xe^{xy}\cos 2x - 3)\,dy = \cos 2x \int^y e^{xy}x\,dy - 3\int dy \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ f(x, y) &= e^{xy}\cos 2x - 3y + h(x). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Derivando con respecto a x e igualando a M:

$$f_x = -2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + ye^{xy}\cos 2x + h'(x) = ye^{xy}\cos 2x - 2e^{xy}\operatorname{sen} 2x + 2x.$$

Entonces, despejando $h'(x)$ e integrando:

$$h'(x) = 2x \Rightarrow h(x) = x^2 + C_1.$$

Sustituyendo $h(x)$ en (2.12):

$$f(x, y) = e^{xy}\cos 2x - 3y + x^2 + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$f(x, y) = C_2 \ \Rightarrow \ e^{xy}\cos 2x - 3y + x^2 = C.$$

□

Ejercicios 2.6.1 *Ecuaciones diferenciales exactas.* *Soluciones en la página 15*
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales exactas:

1. $(3x^2 + 2xy^2 - 2x)\,dx + (3y^2 + 2x^2y - 2y)\,dy = 0.$
2. $(2xy - e^{2y})\,dx + (x^2 + xe^{2y} - y)\,dy = 0.$
3. $\left(y\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \dfrac{1}{x}\right)dx + \left(x\cos y - \cos x + \dfrac{1}{y}\right)dy = 0.$
4. $(4x^3y + y^3 - 2x)\,dx + (x^4 + 3xy^2 - 3y^2)\,dy = 0.$
5. $(y\cos x + 2xe^y - x)\,dx + (y + \operatorname{sen} x + x^2e^y)\,dy = 0.$
6. $(e^x\operatorname{sen} y + 2y\operatorname{sen} x - 2x)\,dx + (e^x\cos y - 2\cos x + 2y)\,dy = 0.$
7. $(4x^3 + 4xy - 1)\,dx = (1 - 2x^2 - 2y)\,dy.$

8. $(y \ln x + y)\, dx + (x \ln x - e^y)\, dy = 0$.

9. $[y \sec^2(xy) + \operatorname{sen} x]\, dx + [x \sec^2(xy) + \operatorname{sen} y]\, dy = 0$.

10. $\left[\dfrac{1}{y} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right) - \dfrac{y}{x^2} \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) + 1\right] dx + \left[\dfrac{1}{x} \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{x}{y^2} \operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{y}\right) + \dfrac{1}{y^2}\right] dy = 0$.

11. $\left(ye^y + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right) y' = \dfrac{y}{x^2 + y^2} - xe^x$.

12. $(y \operatorname{sen} 2x - 2y + 2y^2 e^{xy^2})\, dx - \left(2x - \operatorname{sen}^2 x - 4xye^{xy^2}\right) dy = 0$.

13. $(2xy - e^{3y})\, dx + (x^2 - kxe^{3y} - 3y^2)\, dy = 0$.

Resolver los siguientes PVI:

14. $\left(y^2 \cos x - 3x^2 y - 2x\right) dx + \left(2y \operatorname{sen} x - x^3 + \ln y\right) dy = 0$, con $y(0) = e$.

15. $(y + xe^x + 2)\, dx + (x + e^y)\, dy = 0$, con $y(1) = 0$.

16. $(e^y \operatorname{sen} x + \tan y)\, dx - \left(e^y \cos x - x \sec^2 y\right) dy = 0$, con $y(0) = 0$.

17. $\left(\dfrac{x + y}{1 + x^2}\right) dx + (y + \arctan x)\, dy = 0$, con $y(0) = 1$.

18. Determinar los valores de las constantes A y B que hacen exacta a la ecuación diferencial

$$\left(y^3 - y^2 \operatorname{sen} x - 2x\right) dx + \left(Axy^2 + By \cos x - 3y^2\right) dy = 0.$$

19. Obtener una función $M(x, y)$ de modo tal que sea exacta la ecuación diferencial

$$M(x, y)\, dx + (e^x \cos y + 2 \cos y)\, dy = 0.$$

20. Obtener una función $N(x, y)$ de modo tal que sea exacta la ecuación diferencial

$$N(x, y)\, dy + \left(\frac{x^2 - y^2}{x^2 y} - 2x\right) dx = 0.$$

Ejercicios 2.6.1 *Ecuaciones diferenciales exactas.* *Página 13*

1. $x^3 + x^2y^2 - x^2 - y^2 + y^3 = C$.
2. La ED no es exacta.
3. $-y\cos x + x \operatorname{sen} y + \ln x + \ln y = C$.
4. $x^4y + xy^3 - y^3 - x^2 = C$.
5. $y^2 + 2y \operatorname{sen} x + 2x^2e^y - x^2 = C$.
6. $e^x \operatorname{sen} y - 2y\cos x - x^2 + y^2 = C$.
7. $x^4 + 2x^2y - x - y + y^2 = C$.
8. $(x\ln x)y - e^y = C$.
9. $\tan(xy) - \cos x - \cos y = C$.
10. $-\cos\left(\dfrac{x}{y}\right) + \operatorname{sen}\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{1}{y} + x = C$.
11. $\arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) - xe^x + e^x + e^y - ye^y = C$.
12. $-\dfrac{1}{2}y\cos(2x) - 2xy + 2e^{xy^2} + \dfrac{y}{2} = C$.
13. La ED será exacta, si $k = 3$.
    $x^2y - xe^{3y} - y^3 = C$.
14. $y^2 \operatorname{sen} x + y\ln y = x^3y + x^2 + y$.
15. $xy + e^y + xe^x - e^x + 2x = 3$.
16. $e^y\cos x - x\tan y = 1$.
17. $y^2 + 2y\arctan x + \ln(1 + x^2) = 1$.
18. Para que la ED sea exacta $A = 3$ y $B = 2$.
19. $M(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + k(x)$.
20. $N(x, y) = \dfrac{y^2 - x^2}{xy^2} + k(y)$.