CAPÍTULO

2

Métodos de solución de ED de primer orden

2.7 Factor integrante

Como puede observarse en todas las ED resueltas hasta ahora, es frecuente que hagamos manipulaciones algebraicas para simplificar su forma y resolverlas con cierta comodidad. Esto es válido, pues las ED antes y después de las operaciones tendrán la misma solución. Sin embargo, algunas de las ED pueden perder la propiedad de exactitud al modificarse algebraicamente.

Ejemplo 2.7.1 *Vamos a calcular la diferencial total de la función $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2$ y manipular la ED asociada para obtener una ED no exacta.*

▼ Dado que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 y + 2xy^2 \quad \& \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 + 2x^2 y,$$

se tiene que

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy = (3x^2 y + 2xy^2)\,dx + (x^3 + 2x^2 y)\,dy.$$

Claramente, la ED

$$\underbrace{(3x^2 y + 2xy^2)}_{M}\,dx + \underbrace{(x^3 + 2x^2 y)}_{N}\,dy = 0 \tag{2.1}$$

es exacta, pues además de que el lado izquierdo es la diferencial total de $f(x, y) = x^3 y + x^2 y^2$, podemos comprobar la igualdad de las parciales mixtas:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 4xy \quad \& \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3x^2 + 4xy.$$

En ambos paréntesis de la ED (2.1) podemos factorizar x y escribir

$$x(3xy + 2y^2)\,dx + x(x^2 + 2xy)\,dy = 0,$$

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

o bien, si dividimos entre x obtendríamos la ED,

$$\underbrace{(3xy + 2y^2)}_{\overline{M}}\, dx + \underbrace{(x^2 + 2xy)}_{\overline{N}}\, dy = 0. \tag{2.2}$$

Sin embargo esta nueva ED (2.2), aunque es equivalente a la (2.1), ya no es exacta, como podemos ver con las derivadas parciales mixtas:

$$\frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = 3x + 4y \quad \& \quad \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} = 2x + 2y.$$

□

Esto nos sugiere la idea de la existencia de ecuaciones diferenciales que no son exactas, pero que al ser multiplicadas por ciertas funciones $\mu(x, y)$ dan como resultado ecuaciones diferenciales exactas, cuyas soluciones son también soluciones de las ecuaciones diferenciales originales no exactas.

- Supongamos inicialmente que se tiene una ecuación diferencial

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0 \tag{2.3}$$

que no es exacta. Esto es, que

$$\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

y que $\mu(x, y)$ es una función tal que la ecuación diferencial, obtenida al multiplicar (2.3) por μ:

$$\mu(x, y)M(x, y)\, dx + \mu(x, y)N(x, y)\, dy = 0$$

resulta exacta. Es decir, que

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu M) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu N).$$

Cuando esto sucede se dice que la función $\mu(x, y)$ es un factor integrante de la ED (2.3).

Se supone, claro está, que la función $\mu(x, y)$ no es la función idénticamente cero, $\mu(x, y) \neq 0$ y además $\mu(x, y)$ puede depender de dos variables x & y o bien de sólo una de ellas.

Ejemplo 2.7.2 *Verificar que la función* $\mu(x) = \dfrac{1}{x^3}$ *sea un factor integrante de la ecuación diferencial:*

$$(3x^5 \tan y - 2y^3)\, dx + (x^6 \sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2)\, dy = 0.$$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} M(x, y) = 3x^5 \tan y - 2y^3 & \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x^5 \sec^2 y - 6y^2 \\ N(x, y) = x^6 \sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2 & \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 6x^5 \sec^2 y + 12x^2y^3 + 3y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}.$$

La ED no es exacta. Al multiplicar la ED por la función $\mu(x) = x^{-3}$, se obtiene:

$$x^{-3}(3x^5 \tan y - 2y^3)\, dx + x^{-3}(x^6 \sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2)\, dy = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3x^2 \tan y - 2x^{-3}y^3)\, dx + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3x^{-2}y^2)\, dy = 0; \tag{2.4}$$

Ahora hallamos que

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{M} = \mu M = 3x^2 \tan y - 2x^{-3}y^3 & \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{M}}{\partial y} = 3x^2 \sec^2 y - 6x^{-3}y^2 \\ \overline{N} = \mu N = x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3x^{-2}y^2 & \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{N}}{\partial x} = 3x^2 \sec^2 y - 6x^{-3}y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}.$$

Entonces la nueva ecuación diferencial (2.4) es exacta.

Por lo tanto la función $\mu(x) = \dfrac{1}{x^3} = x^{-3}$ es un factor integrante de la ED dada.

□

Ejemplo 2.7.3 *Verificar que la función* $\mu(y) = y^2$ *sea un factor integrante de la ecuación diferencial:*

$$(3x^2y + y^2)\,dx + (3x^3 - y^2 + 4xy)\,dy = 0.$$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} M(x, y) = 3x^2y + y^2 & \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x^2 + 2y; \\ N(x, y) = 3x^3 - y^2 + 4xy & \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 9x^2 + 4y; \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{ la ED no es exacta.}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por la función $\mu(y) = y^2$, se obtiene:

$$\begin{array}{c} y^2(3x^2y + y^2)\,dx + y^2(3x^3 - y^2 + 4xy)\,dy = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (3x^2y^3 + y^4)\,dx + (3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3)\,dy = 0. \end{array} \tag{2.5}$$

Y ahora:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu M = \overline{M} = 3x^2y^3 + y^4 & \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{M}}{\partial y} = 9x^2y^2 + 4y^3 \\ \mu N = \overline{N} = 3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3 & \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{N}}{\partial x} = 9x^2y^2 + 4y^3 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x} \Rightarrow \text{ la nueva ED (2.5) es exacta.}$$

Por lo que la función $\mu(y) = y^2$ es un factor integrante de la ecuación diferencial dada.

□

Ejemplo 2.7.4 *Verificar que la función* $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ *sea un factor integrante de la ecuación diferencial:*

$$(2x^2 + 2y^2 - x)\,dx + (x^2 + y^2 - y)\,dy = 0.$$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} M(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - x & \Rightarrow \dfrac{\partial M}{\partial y} = 4y \\ N(x, y) = x^2 + y^2 - y & \Rightarrow \dfrac{\partial N}{\partial x} = 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \text{ la ED no es exacta.}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial por la función $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$:

$$\begin{array}{c} \left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\left[2(x^2 + y^2) - x\right]\right)dx + \left(\dfrac{1}{x^2 + y^2}\left[(x^2 + y^2) - y\right]\right)dy = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(2 - \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(1 - \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dy = 0. \end{array} \tag{2.6}$$

Y ahora:

$$\left.\begin{array}{ll} \mu M = \overline{M} = 2 - x(x^2 + y^2)^{-1} & \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{M}}{\partial y} = -x(-1)\big(x^2 + y^2\big)^{-2}2y = 2xy\big(x^2 + y^2\big)^{-2} \\ \mu N = \overline{N} = 1 - y(x^2 + y^2)^{-1} & \Rightarrow \dfrac{\partial \overline{N}}{\partial x} = -y(-1)\big(x^2 + y^2\big)^{-2}2x = 2xy\big(x^2 + y^2\big)^{-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial \overline{M}}{\partial y} = \frac{\partial \overline{N}}{\partial x}.$$

La nueva ecuación diferencial (2.6) es exacta. Por lo tanto, la función $\mu(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ es un factor integrante de la ecuación diferencial dada.

□

Por otra parte, si $f(x,y) = C$ es la solución general de la ecuación diferencial exacta:

$$\mu(x,y)M(x,y)\,dx + \mu(x,y)N(x,y)\,dy = 0,$$

entonces $f(x,y) = C$ satisface a la ecuación diferencial:

$$\mu(x,y)\,[M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy] = 0,$$

por lo que $f(x,y) = C$ es la solución general de la ecuación diferencial (no exacta)

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0, \text{ ya que } \mu(x,y) \neq 0.$$

Es decir, la solución $f(x,y) = C$ de la nueva ecuación diferencial exacta es también solución general de la ecuación diferencial original no exacta. Por lo tanto, para resolver la ecuación diferencial no exacta debemos resolver la ecuación diferencial exacta.
Pero la ecuación diferencial exacta se tendrá siempre y cuando se conozca un factor integrante, por lo cual es muy importante saber determinar u obtener dicho factor integrante para la ecuación diferencial no exacta ¿Cómo obtenerlo?
Veamos el caso general:
La función $\mu(x,y)$ es un factor integrante para la ecuación diferencial no exacta:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \text{ si y sólo si } \mu M(x,y)\,dx + \mu N(x,y)\,dy = 0 \quad \text{es exacta} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} \;\Rightarrow\; \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}.$$

Vemos que $\mu(x,y)$ debe ser solución de la ecuación diferencial:

$$\mu M_y + M\mu_y = \mu N_x + N\mu_x. \tag{2.7}$$

Observamos que para determinar μ necesitamos resolver una ecuación diferencial parcial, lo cual no está a nuestro alcance. Por lo tanto, no podemos resolver el problema general, que es cuando un factor integrante $\mu(x,y)$ depende de ambas variables x & y.

¿Qué sucede cuando μ depende sólo de una variable? Consideremos dos casos:

1. Cuando μ depende sólo de x (esto es, μ no depende de y).

$$\mu = \mu(x) \;\Rightarrow\; \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu_x = \mu'(x) \quad \& \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu_y = 0.$$

Al utilizar $\mu(x)$ y sus derivadas en la ecuación diferencial (2.7), se tiene:

$$\mu(x)M_y + M\mu_y = \mu(x)N_x + N\mu_x \;\Rightarrow \mu(x)M_y + M\cdot 0 = \mu(x)N_x + N\mu'(x) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu(x)M_y - \mu(x)N_x = N\mu'(x) \;\Rightarrow\; N\mu'(x) = (M_y - N_x)\mu(x) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{M_y - N_x}{N},$$

que es una ecuación diferencial ordinaria para $\mu(x)$ siempre y cuando el cociente $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ dependa sólo de x, es decir, siempre y cuando este cociente $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ no dependa de la variable y, después de simplificar dicha expresión. ¿Por qué?, porque $\dfrac{\mu'(x)}{\mu(x)}$ no depende de y, depende solamente de x.

Ahora bien, si $\dfrac{M_y - N_x}{N} = g(x)$, entonces existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$ determinado por

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{M_y - N_x}{N} = g(x)$$

de donde

$$\int \frac{\mu'(x)\,dx}{\mu(x)} = \int g(x)\,dx \;\Rightarrow\; \ln \mu(x) = \int g(x)\,dx \;\Rightarrow\; \mu(x) = e^{\int g(x)\,dx}.$$

Notemos que

$$\int g(x)\,dx = h(x) + C_1, \text{ con } C_1 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \mu(x) = e^{h(x)+C_1} = e^{h(x)}e^{C_1} = Ce^{h(x)}, \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

Lo cual nos indica la existencia de una infinidad de factores integrantes. Pero, debido a la necesidad de contar con sólo un factor integrante, podemos ignorar la constante de integración C y quedarnos con $\mu(x) = e^{h(x)}$.

2. Cuando μ depende sólo de y (esto es, μ no depende de x).

$$\mu = \mu(y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu_y = \mu'(y) \quad \& \quad \frac{\partial \mu}{\partial x} = \mu_x = 0.$$

Al usar $\mu(y)$ y sus derivadas en la ecuación diferencial (2.7), se tiene:

$$\begin{aligned}\mu(y)M_y + M\mu_y = \mu(y)N_x + N\mu_x \;&\Rightarrow \mu(y)M_y + M\mu'(y) = \mu(y)N_x + N\cdot 0 \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow M\mu'(y) = \mu(y)N_x - \mu(y)M_y = \mu(y)(N_x - M_y) \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{N_x - M_y}{M},\end{aligned}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria para $\mu(y)$ siempre y cuando $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ dependa sólo de y, es decir, siempre y cuando el cociente $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ no dependa de la variable x, después de simplificar dicha expresión.

¿Por qué?, porque $\dfrac{\mu'(y)}{\mu(y)}$ no depende de x, depende solamente de y.

Ahora bien, si $\dfrac{N_x - M_y}{M} = g(y)$, entonces existe un factor integrante $\mu = \mu(y)$ determinado por

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{N_x - M_y}{M} = g(y) \;\Rightarrow\; \frac{d\mu}{\mu} = g(y)\,dy,$$

de donde

$$\int \frac{d\mu}{\mu} = \int g(y)\,dy \;\Rightarrow\; \ln \mu(y) = \int g(y)\,dy \;\Rightarrow\; \mu(y) = e^{\int g(y)\,dy}.$$

Notemos que

$$\int g(y)\,dy = j(y) + C_1, \text{ con } C_1 \in \mathbb{R} \;\Rightarrow\; \mu(y) = e^{j(y)+C_1} = e^{j(y)}e^{C_1} = Ce^{j(y)}, \text{con } C \in \mathbb{R}.$$

Lo cual nos indica la existencia de una infinidad de factores integrantes. Pero debido a la necesidad de contar con sólo un factor integrante, podemos ignorar la constante de integración C y quedarnos con $\mu(y) = e^{j(y)}$.

Ejemplo 2.7.5 *Resolver la ED* $(3x^5 \tan y - 2y^3)\,dx + (x^6 \sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2)\,dy = 0.$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} M = 3x^5 \tan y - 2y^3 & \Rightarrow M_y = 3x^5 \sec^2 y - 6y^2 \\ N = x^6 \sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2 & \Rightarrow N_x = 6x^5 \sec^2 y + 12x^2y^3 + 3y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow M_y \neq N_x.$$

La ED no es exacta. ¿Existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$? Es decir, ¿es $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ una función sólo de x? Veamos:

$$\begin{aligned} \frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{(3x^5 \sec^2 y - 6y^2) - (6x^5 \sec^2 y + 12x^2y^3 + 3y^2)}{x^6 \sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2} = \\ &= \frac{-3x^5 \sec^2 y - 12x^2y^3 - 9y^2}{x^6 \sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2} = \frac{-3(x^5 \sec^2 y + 4x^2y^3 + 3y^2)}{x(x^5 \sec^2 y + 4x^2y^3 + 3y^2)} = \\ &= -\frac{3}{x}; \text{ que depende sólo de } x. \end{aligned}$$

Entonces existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$ dado por

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{M_y - N_x}{N} = -\frac{3}{x} \Rightarrow \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\,dx = -\int \frac{3}{x}\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln \mu(x) = -3 \ln x = \ln x^{-3} \Rightarrow \mu(x) = x^{-3}.$$

Multiplicando la ecuación diferencial por $\mu(x) = x^{-3}$:

$$x^{-3}(3x^5 \tan y - 2y^3)\,dx + x^{-3}(x^6 \sec^2 y + 4x^3y^3 + 3xy^2)\,dy = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (3x^2 \tan y - 2x^{-3}y^3)\,dx + (x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3x^{-2}y^2)\,dy = 0. \tag{2.8}$$

Ahora se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{M} = 3x^2 \tan y - 2x^{-3}y^3 & \Rightarrow \overline{M}_y = 3x^2 \sec^2 y - 6x^{-3}y^2; \\ \overline{N} = x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3x^{-2}y^2 & \Rightarrow \overline{N}_x = 3x^2 \sec^2 y - 6x^{-3}y^2; \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x.$$

La nueva ED (2.8) es exacta. Entonces existe una función $f(x, y)$ que cumple

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy = \overline{M}\,dx + \overline{N}\,dy.$$

Es decir, existe $f(x, y)$ tal que $f_x = \overline{M}$ & $f_y = \overline{N}$. Integrando f_x

$$f_x = \overline{M} \Rightarrow f(x, y) = \int^x \overline{M}\,dx = \int^x (3x^2 \tan y - 2x^{-3}y^3)\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x, y) = x^3 \tan y + x^{-2}y^3 + h(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = x^3 \sec^2 y + 3x^{-2}y^2 + h'(y);$$

y ahora

$$f_y = \overline{N} \Rightarrow x^3 \sec^2 y + 3x^{-2}y^2 + h'(y) = x^3 \sec^2 y + 4y^3 + 3x^{-2}y^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(y) = 4y^3 \Rightarrow h(y) = y^4 + C_1.$$

Sustituyendo $h(y)$ en $f(x, y)$ se tiene que:

$$f(x, y) = x^3 \tan y + x^{-2}y^3 + y^4 + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta , así como de la no exacta, es

$$f(x, y) = C_2 \Rightarrow x^3 \tan y + x^{-2}y^3 + y^4 + C_1 = C_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^3 \tan y + x^{-2}y^3 + y^4 = C.$$

□

Ejemplo 2.7.6 *Resolver la ED* $(3x^2y + y^2)\,dx + (3x^3 - y^2 + 4xy)\,dy = 0.$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left.\begin{aligned} M &= 3x^2y + y^2 &\Rightarrow\ M_y &= 3x^2 + 2y;\\ N &= 3x^3 - y^2 + 4xy &\Rightarrow\ N_x &= 9x^2 + 4y; \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ M_y \neq N_x\ \Rightarrow\ \text{la ED no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$? Es decir, ¿es $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ una función sólo de x? Veamos:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{(3x^2 + 2y) - (9x^2 + 4y)}{3x^3 - y^2 + 4xy} = \frac{-6x^2 - 2y}{3x^3 - y^2 + 4xy} \neq g(x).$$

El cociente $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ no depende sólo de x, ya que también depende de y. Esto nos permite asegurar que no existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$.
Ahora bien, ¿existe un factor integrante $\mu = \mu(y)$? Es decir: ¿es $\dfrac{N_x - M_y}{M}$ una función sólo de y? Veamos:

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{(9x^2 + 4y) - (3x^2 + 2y)}{3x^2y + y^2} = \frac{6x^2 + 2y}{3x^2y + y^2} = \frac{2(3x^2 + y)}{y(3x^2 + y)} = \frac{2}{y}.$$

Observamos que $\dfrac{N_x - M_y}{M} = \dfrac{2}{y}$ está en función sólo de y, lo que nos permite asegurar que existe un factor integrante $\mu = \mu(y)$, el cual está dado por

$$\begin{aligned} &\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{N_x - M_y}{M} = \frac{2}{y}\ \Rightarrow\ \int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}\,dy = \int \frac{2}{y}\,dy\ \Rightarrow\\ &\Rightarrow\ \ln\mu(y) = 2\ln y = \ln y^2\ \Rightarrow\ \mu(y) = y^2. \end{aligned}$$

Al multiplicar la ecuación diferencial no exacta por $\mu(y) = y^2$:

$$\begin{aligned} &y^2(3x^2y + y^2)\,dx + y^2(3x^3 - y^2 + 4xy)\,dy = 0\ \Rightarrow\\ &\Rightarrow (3x^2y^3 + y^4)\,dx + (3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3)\,dy = 0. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Ahora se tiene:

$$\left.\begin{aligned} \overline{M} &= 3x^2y^3 + y^4 &\Rightarrow\ \overline{M}_y &= 9x^2y^2 + 4y^3\\ \overline{N} &= 3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3 &\Rightarrow\ \overline{N}_x &= 9x^2y^2 + 4y^3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ \overline{M}_y = \overline{N}_x\ \Rightarrow\ \text{la nueva ED (2.9) es exacta.}$$

Entonces existe una función $f(x, y)$ tal que

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy = \overline{M}\,dx + \overline{N}\,dy.$$

Es decir, existe $f(x, y)$ tal que $f_x = \overline{M}$ & $f_y = \overline{N}$.

$$\begin{aligned} f_y = \overline{N}\ &\Rightarrow f(x, y) = \int^y \overline{N}\,dy = \int^y (3x^3y^2 - y^4 + 4xy^3)\,dy\ \Rightarrow\\ &\Rightarrow f(x, y) = 3x^3\left(\frac{y^3}{3}\right) - \frac{y^5}{5} + 4x\left(\frac{y^4}{4}\right) + h(x)\ \Rightarrow\\ &\Rightarrow f(x, y) = x^3y^3 - \frac{1}{5}y^5 + xy^4 + h(x)\ \Rightarrow\ \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y^3 + y^4 + h'(x); \end{aligned}$$

y ahora

$$f_x = \overline{M}\ \Rightarrow\ 3x^2y^3 + y^4 + h'(x) = 3x^2y^3 + y^4\ \Rightarrow\ h'(x) = 0\ \Rightarrow\ h(x) = C_1.$$

Sustituyendo $h(x)$ en $f(x, y)$ se tiene que

$$f(x, y) = x^3y^3 - \frac{1}{5}y^5 + xy^4 + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta, así como de la no exacta, es

$$f(x, y) = C_2 \Rightarrow x^3y^3 - \frac{1}{5}y^5 + xy^4 + C_1 = C_2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 5x^3y^3 - y^5 + 5xy^4 = C.$$

□

Ejemplo 2.7.7 *Resolver la ecuación diferencial:*

$$(3y^2 \cot x + \operatorname{sen} x \cos x)\, dx - 2y\, dy = 0. \tag{2.10}$$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} M = 3y^2 \cot x + \operatorname{sen} x \cos x & \Rightarrow M_y = 6y \cot x \\ N = -2y & \Rightarrow N_x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow M_y \neq N_x; \text{ entonces la ED (2.10) no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$?, es decir, ¿es $\dfrac{M_y - N_x}{N}$ una función sólo de x?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{6y \cot x}{-2y} = -3 \cot x.$$

Esta última expresión depende sólo de x; entonces sí existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$ y cumple con la ecuación diferencial

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{M_y - N_x}{N} = -3 \cot x \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -3 \cot x\, dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = -3 \int \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\, dx \Rightarrow \ln \mu = -3 \ln(\operatorname{sen} x) = \ln(\operatorname{sen} x)^{-3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu(x) = \operatorname{sen}^{-3} x.$$

Multiplicando la ecuación diferencial (2.10) por el factor integrante:

$$(3y^2 \operatorname{sen}^{-4} x \cos x + \operatorname{sen}^{-2} x \cos x)\, dx - 2y \operatorname{sen}^{-3} x\, dy = 0. \tag{2.11}$$

Se tiene ahora que

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{M} = 3y^2 \operatorname{sen}^{-4} x \cos x + \operatorname{sen}^{-2} x \cos x & \Rightarrow \overline{M}_y = 6y \operatorname{sen}^{-4} x \cos x \\ \overline{N} = -2y \operatorname{sen}^{-3} x & \Rightarrow \overline{N}_x = 6y \operatorname{sen}^{-4} x \cos x \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x.$$

La nueva ED (2.11) es exacta. Entonces existe $f(x, y)$ tal que $f_x = \overline{M}$ & $f_y = \overline{N}$. Tenemos:

$$f_x = \overline{M} \quad \& \quad f(x, y) = \int^y \overline{N}\, dy = \int^y -2y \operatorname{sen}^{-3} x\, dy = -y^2 \operatorname{sen}^{-3} x + h(x).$$

Derivando respecto a x e igualando a $\overline{M}$:

$$f_x = 3y^2 \operatorname{sen}^{-4} x \cos x + h'(x) = 3y^2 \operatorname{sen}^{-4} x \cos x + \operatorname{sen}^{-2} x \cos x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(x) = \operatorname{sen}^{-2} x \cos x \Rightarrow h(x) = \int \operatorname{sen}^{-2} x \cos x\, dx = -\operatorname{sen}^{-1} x + C_1.$$

Entonces:

$$f(x,y) = -y^2 \operatorname{sen}^{-3}x - \operatorname{sen}^{-1}x + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$f(x,y) = C_2 \Rightarrow -y^2 \operatorname{sen}^{-3}x - \operatorname{sen}^{-1}x + C_1 = C_2 \Rightarrow \frac{y^2}{\operatorname{sen}^3 x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} = C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2 + \operatorname{sen}^2 x = C \operatorname{sen}^3 x.$$

□

Ejemplo 2.7.8 *Resolver la ecuación diferencial:*

$$(y \ln y + ye^x)\,dx + (x + y\cos y)\,dy = 0. \tag{2.12}$$

▼ Inicialmente se tiene:

$$\left.\begin{array}{ll} M = y\ln y + ye^x & \Rightarrow M_y = 1 + \ln y + e^x \\ N = x + y\cos y & \Rightarrow N_x = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow \text{ la ED no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{1 + \ln y + e^x - 1}{x + y\cos y} = \frac{\ln y + e^x}{x + y\cos y}.$$

El último cociente no depende sólo de x, entonces no existe $\mu = \mu(x)$.

¿Existe un factor integrante $\mu = \mu(y)$?

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-\ln y - e^x}{y\ln y + ye^x} = -\frac{\ln y + e^x}{y(\ln y + e^x)} = -\frac{1}{y}.$$

En este caso, este último cociente sí depende sólo de y, entonces existe $\mu = \mu(y)$ el cual cumple con la ecuación diferencial

$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = \frac{N_x - M_y}{M} = -\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = -\int \frac{dy}{y} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln \mu = -\ln y = \ln y^{-1} \Rightarrow \mu(y) = y^{-1}.$$

Multiplicando la ecuación diferencial (2.12) por el factor integrante:

$$(\ln y + e^x)\,dx + (xy^{-1} + \cos y)\,dy = 0. \tag{2.13}$$

Ahora tenemos

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{M} = \ln y + e^x & \Rightarrow \overline{M}_y = \dfrac{1}{y} \\ \overline{N} = xy^{-1} + \cos y & \Rightarrow \overline{N}_x = y^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \Rightarrow \text{ la nueva ED (2.13) es exacta.}$$

Entonces existe $f(x,y)$ tal que $f_x = \overline{M}$ & $f_y = \overline{N}$. Tenemos:

$$f_y = \overline{N} \quad \& \quad f(x,y) = \int^x (\ln y + e^x)\,dx = x\ln y + e^x + h(y).$$

Derivando respecto a y e igualando a $\overline{N}$:

$$f_y = \frac{x}{y} + h'(y) = xy^{-1} + \cos y \Rightarrow h'(y) = \cos y \Rightarrow h(y) = \operatorname{sen} y + C_1.$$

Entonces:

$$f(x, y) = x \ln y + e^x + \operatorname{sen} y + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$\begin{aligned} f(x, y) = C_2 \;&\Rightarrow x \ln y + e^x + \operatorname{sen} y + C_1 = C_2 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow x \ln y + e^x + \operatorname{sen} y = C. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.7.9 *Resolver la ED* $\quad y' = -\dfrac{y \operatorname{sen} 2x + xy^2}{y^3 - \operatorname{sen}^2 x}$.

▼ Se puede escribir esta ecuación diferencial como

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -\frac{y \operatorname{sen} 2x + xy^2}{y^3 - \operatorname{sen}^2 x} \;&\Rightarrow (y \operatorname{sen} 2x + xy^2)\, dx = -(y^3 - \operatorname{sen}^2 x)\, dy \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow (y \operatorname{sen} 2x + xy^2)\, dx + (y^3 - \operatorname{sen}^2 x)\, dy = 0. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Se tiene ahora:

$$\left.\begin{array}{lll} M = y \operatorname{sen} 2x + xy^2 & \Rightarrow & M_y = \operatorname{sen} 2x + 2xy \\ N = y^3 - \operatorname{sen}^2 x & \Rightarrow & N_x = -2 \operatorname{sen} x \cos x = -\operatorname{sen} 2x \end{array}\right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \;\Rightarrow \; \text{la ED (2.14) no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{\operatorname{sen} 2x + 2xy + \operatorname{sen} 2x}{y^3 - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \operatorname{sen} 2x + 2xy}{y^3 - \operatorname{sen}^2 x} \neq g(x).$$

Entonces no existe $\mu = \mu(x)$, ya que la expresión anterior no depende sólo de x.

¿Existe un factor integrante $\mu = \mu(y)$?

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-2 \operatorname{sen} 2x - 2xy}{y \operatorname{sen} 2x + xy^2} = \frac{-2(\operatorname{sen} 2x + xy)}{y(\operatorname{sen} 2x + xy)} = -\frac{2}{y}.$$

Entonces, por lo anterior, sí existe $\mu = \mu(y)$, el cual cumple con

$$\begin{aligned} \frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = -\frac{2}{y} \;&\Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = -\frac{2}{y}\, dy \;\Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = -2 \int \frac{dy}{y} \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln \mu = -2 \ln y = \ln y^{-2} \;\Rightarrow \; \mu(y) = y^{-2}. \end{aligned}$$

Multiplicando (2.14) por el factor integrante, se obtiene:

$$(y^{-1} \operatorname{sen} 2x + x)\, dx + (y - y^{-2} \operatorname{sen}^2 x)\, dy = 0. \tag{2.15}$$

Vemos que

$$\left.\begin{array}{lll} \overline{M} = y^{-1} \operatorname{sen} 2x + x \;\Rightarrow & \overline{M}_y = -y^{-2} \operatorname{sen} 2x \\ \overline{N} = y - y^{-2} \operatorname{sen}^2 x \;\Rightarrow & \overline{N}_x = -y^{-2} 2 \operatorname{sen} x \cos x = -y^{-2} \operatorname{sen} 2x \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \;\text{la ED (2.15) es exacta.}$$

Por lo tanto, existe $f(x, y)$ tal que $f_x = \overline{M}$ & $f_y = \overline{N}$. De la primera condición:

$$f_x = \overline{M} \;\Rightarrow\; f(x, y) = \int^x (y^{-1} \operatorname{sen} 2x + x)\, dx = -\frac{1}{2} y^{-1} \cos 2x + \frac{x^2}{2} + h(y). \tag{2.16}$$

Derivando con respecto a y e igualando a $\overline{N}$:

$$f_y = \frac{1}{2}y^{-2}\cos 2x + h'(y) = y - y^{-2}\text{sen}^2 x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; h'(y) = y - y^{-2}\,\text{sen}^2 x - \frac{1}{2}y^{-2}\cos 2x = y - y^{-2}\underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)}_{\text{sen}^2 x} - \frac{1}{2}y^{-2}\cos 2x = y - \frac{1}{2}y^{-2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; h'(y) = y - \frac{1}{2}y^{-2} \;\Rightarrow\; h(y) = \int\left(y - \frac{1}{2}y^{-2}\right)dy = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^{-1} + C_1.$$

Entonces, sustituyendo $h(y)$ en (2.16):

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}y^{-1}\cos 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^{-1} + C_1.$$

Por lo tanto, por ser la diferencial de $f(x, y)$ igual a cero, $f(x, y)$ es una constante y la solución general de la ED es

$$f(x, y) = C_2 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{2}y^{-1}\cos 2x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}y^{-1} + C_1 = C_2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; y^{-1}\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = C \;\Rightarrow\; y^{-1}\,\text{sen}^2 x + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) = C.$$

Multiplicando por $2y$:

$$2\,\text{sen}^2 x + y(x^2 + y^2) = 2Cy \;\Rightarrow\; 2\,\text{sen}^2 x + y(x^2 + y^2) = Cy.$$

□

Ejemplo 2.7.10 *Comprobar que la ED lineal* $y' + p(x)y = q(x)$, *con* $p(x) \neq 0$ *no es exacta, pero sí tiene factor integrante* $\mu = \mu(x)$.

▼

$$y' + p(x)y = q(x) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} + p(x)y - q(x) = 0 \;\Rightarrow\; [p(x)y - q(x)]\,dx + dy = 0. \tag{2.17}$$

Se tiene:

$$\left.\begin{array}{lll} M = p(x)y - q(x) & \Rightarrow & M_y = p(x) \\ N = 1 & \Rightarrow & N_x = 0 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; M_y \neq N_x \;\Rightarrow\; \text{la ED lineal (2.17) no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{p(x) - 0}{1} = p(x).$$

Por lo anterior, sí existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$ y cumple con

$$\frac{\mu'}{\mu} = p(x) \;\Rightarrow\; \frac{d\mu}{\mu} = p(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int\frac{d\mu}{\mu} = \int p(x)\,dx \;\Rightarrow\; \ln\mu(x) = \int p(x)\,dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}.$$

Multiplicando (2.17) por $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$:

$$[p(x)y - q(x)]e^{\int p(x)\,dx}\,dx + e^{\int p(x)\,dx}dy = 0. \tag{2.18}$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{M} = [p(x)y - q(x)]e^{\int p(x)\,dx} & \Rightarrow \overline{M}_y = p(x)e^{\int p(x)\,dx} \\ \overline{N} = e^{\int p(x)\,dx} & \Rightarrow \overline{N}_x = e^{\int p(x)\,dx}p(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \Rightarrow \text{ la ED (2.18) es exacta.}$$

Por lo tanto la ED (2.17) sí tiene un factor integrante y éste es $\mu(x) = e^{\int p(x)\,dx}$.

□

Ejemplo 2.7.11 *Comprobar que la ED lineal* $x' + p(y)x = q(y)$, *con* $p(y) \neq 0$ *no es exacta, pero sí tiene un factor integrante* $\mu = \mu(y)$.

▼ Reescribimos la ED en formato diferencial:

$$x' + p(y)x = q(y) \Rightarrow \frac{dx}{dy} + p(y)x - q(y) = 0 \Rightarrow dx + [p(y)x - q(y)]\,dy = 0. \tag{2.19}$$

Se tiene ahora:

$$\left.\begin{array}{ll} M = 1 & \Rightarrow M_y = 0 \\ N = p(y)x - q(y) & \Rightarrow N_x = p(y) \end{array}\right\} \Rightarrow M_y \neq N_x \Rightarrow \text{ la ED lineal (2.19) no es exacta.}$$

¿Existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{0 - p(y)}{p(y)x - q(y)}, \text{ no depende sólo de } x.$$

Entonces no existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$.

¿Existe un factor integrante $\mu = \mu(y)$?

$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{p(y) - 0}{1} = p(y), \text{ sí depende sólo de } y.$$

Sí existe un factor integrante $\mu = \mu(y)$ y cumple con

$$\frac{\mu'}{\mu} = p(y) \Rightarrow \frac{d\mu}{\mu} = p(y)\,dy \Rightarrow \int \frac{d\mu}{\mu} = \int p(y)\,dy \Rightarrow \ln \mu(y) = \int p(y)\,dy \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu(y) = e^{\int p(y)\,dy}.$$

Multiplicando (2.19) por $\mu(y) = e^{\int p(y)\,dy}$:

$$e^{\int p(y)\,dy}\,dx + [p(y)x - q(y)]e^{\int p(y)\,dy}\,dy = 0. \tag{2.20}$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{M} = e^{\int p(y)\,dy} & \Rightarrow \overline{M}_y = e^{\int p(y)\,dy}p(y) \\ \overline{N} = [p(y)x - q(y)]e^{\int p(y)\,dy} & \Rightarrow \overline{N}_x = p(y)e^{\int p(y)\,dy} \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \Rightarrow \text{ la ED (2.20) es exacta.}$$

Por lo tanto la ED (2.19) sí tiene un factor integrante y éste es $\mu(y) = e^{\int p(y)\,dy}$.

□

Ejercicios 2.7.1 *Factor integrante.* *Soluciones en la página 14*

1. Verificar que la función $\mu(x, y) = \dfrac{1}{xy}$ sea un factor integrante de la ecuación diferencial:

$$\left(xy \operatorname{sen} y + xy^2 \operatorname{sen} x + \frac{1}{x}\right) dx + \left(x^2 y \cos y - xy \cos x + \frac{1}{y}\right) dy = 0.$$

2. Verificar que la función $\mu(x, y) = \sec^2(xy)$ sea un factor integrante de la ecuación diferencial:

$$[y + \operatorname{sen} x \cos^2(xy)]\, dx + [x + \operatorname{sen} y \cos^2(xy)]\, dy = 0.$$

3. Verificar que la función $\mu(x, y) = \dfrac{1}{xy(x + 2y)}$ sea un factor integrante de la ecuación diferencial:

$$(xy + y^2)\, dx + (x^2 + 3xy)\, dy = 0.$$

Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales encontrando un factor integrante.

4. $\left(3xy + y^2\right) dx + \left(x^2 + xy\right) dy = 0.$
5. $\left(2xy^2 - 3y^3\right) dx + \left(7 - 3xy^2\right) dy = 0.$
6. $\left(y^3 + 2e^x y\right) dx + \left(e^x + 3y^2\right) dy = 0.$
7. $\left(2x^2 y + 2y + 5\right) dx + (2x^3 + 2x)\, dy = 0.$
8. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y^3 - 3x}{y}.$
9. $(\operatorname{sen} y - 2ye^{-x} \operatorname{sen} x)\, dx + (\cos y + 2e^{-x} \cos x)\, dy = 0.$
10. $y \cos x\, dx + (y \operatorname{sen} x + 2 \operatorname{sen} x)\, dy = 0.$

Ejercicios 2.7.1 *Factor Integrante.* *Página 12*

1. $\mu(x, y) = \dfrac{1}{xy}$ es un factor integrante.
2. $\mu(x, y) = \sec^2(xy)$ es un factor integrante.
3. $\mu(x, y) = \dfrac{1}{xy(x + 2y)}$ es un factor integrante.
4. $x^3y + \frac{1}{2}x^2y^2 = C$.
5. $x^2 - 3xy - \frac{7}{y} = C$.
6. $ye^{2x} + y^3e^x = C$.
7. $2xy + 5 \arctan x = C$.
8. $xy^3 - \frac{1}{6}y^6 = C$.
9. $e^x \operatorname{sen} y + 2y \cos x = C$.
10. $y^2e^y \operatorname{sen} x = C$.