CAPÍTULO

2

Métodos de solución de ED de primer orden

2.8 Miscelánea

En este apartado queremos responder a la pregunta ¿cómo proceder cuando se nos pide resolver una ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

y no nos dicen de qué tipo es?
La identificación del tipo de la ecuación diferencial ordinaria es importante para poder resolverla, ¿cómo identificarla?, ¿existe algún camino que nos ayude a eliminar posibilidades sin invertir demasiado tiempo?
Análisis. Se dan a continuación algunas sugerencias que nos ayudan a encontrar la forma de resolver la ecuación diferencial:

1. Una ED no es homogénea cuando en ella se tiene alguna función trigonométrica o inversa trigonométrica cuyo argumento no es $\dfrac{x}{y}$ ni $\dfrac{y}{x}$; también cuando se tiene alguna función exponencial cuyo exponente no es $\dfrac{y}{x}$ ni $\dfrac{x}{y}$.

2. Si en ED no hay funciones trascendentes, y todos los términos son del mismo grado, entonces la ecuación diferencial es homogénea; y si en la ecuación diferencial aparece explícitamente el término $\dfrac{y}{x}$ o bien el término $\dfrac{x}{y}$, entonces la ecuación diferencial puede ser homogénea de la forma $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ o bien $\dfrac{dx}{dy} = F\left(\dfrac{x}{y}\right)$.

3. Si el coeficiente de la diferencial dy es una función que depende sólo de x, entonces podemos pensar que se trata de una ecuación diferencial lineal o de Bernoulli para $y = \phi(x)$. Esto es, una del tipo $y' + p(x)y = q(x)$ o bien del tipo $y' + p(x)y = q(x)y^n$.

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

4. Si el coeficiente de la diferencial dx es una función que depende sólo de y, entonces podemos pensar en una ecuación diferencial lineal o de Bernoulli para $x = \phi(y)$.
   Esto es, una del tipo $x' + p(y)x = q(y)$ o bien del tipo $x' + p(y)x = q(y)x^n$.

5. Si para la ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ se tiene $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, entonces la ED no es exacta. Además de esto:
   a. Si $\dfrac{M_y - N_x}{N} \neq g(x)$, entonces no existe factor integrante $\mu = \mu(x)$.
      En este caso la ecuación diferencial tampoco es lineal para y en función de x.
   b. Si $\dfrac{N_x - M_y}{M} \neq g(y)$, entonces no existe factor integrante $\mu = \mu(y)$.
      En este caso la ecuación diferencial tampoco es lineal para x en función de y.
   c. Si $\dfrac{M_y - N_x}{N} \neq g(x)$ & $\dfrac{N_x - M_y}{M} \neq g(y)$.
      Entonces no existe factor integrante μ de una sola variable, por lo cual la ecuación diferencial tampoco es lineal.

6. Si la ecuación diferencial $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ no es homogénea, no es exacta y no tiene factor integrante de una sola variable (por lo que no es lineal), entonces intentamos expresar $M(x, y)$ & $N(x, y)$ como productos o cocientes de funciones dependientes de una sola variable. Esto es, vemos si podemos separar las variables.

7. Si la ecuación diferencial no es homogénea ni exacta, no tiene factor integrante de una sola variable (por lo que no es lineal) y no es de variables separables, entonces probemos analizarla como una de Bernoulli. Esto es, intentemos expresar la ED $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy$ como $y' + p(x)y = q(x)y^n$ o bien como $x' + p(y)x = q(y)x^n$.

Comentario final. Estas sugerencias están dadas en un orden que no es necesariamente único. El análisis de la ED es importante. Si ninguna de estas recomendaciones aplica a una ED, se podría pensar en algún otro método no tratado en este capítulo.

Ejemplo 2.8.1 *Resolver la ED* $(xe^y + e^{2y})\,dy = (x - e^y)\,dx$.

▼ Análisis. Al ver las exponenciales e^y & e^{2y}, podemos decir que la ecuación diferencial no es homogénea. Viendo que los coeficientes de las diferenciales dx & dy son funciones que dependen de ambas variables, podemos ahora decir que la ecuación diferencial no parece ser lineal para $y = \phi(x)$ ni para $x = \phi(y)$. Tomamos el camino de las exactas.

$$(xe^y + e^{2y})\,dy = (x - e^y)\,dx \Rightarrow -(x - e^y)\,dx + (xe^y + e^{2y})\,dy = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (e^y - x)\,dx + (xe^y + e^{2y})\,dy = 0.$$

Tenemos entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} M = e^y - x & \Rightarrow M_y = e^y \\ N = xe^y + e^{2y} & \Rightarrow N_x = e^y \end{array}\right\} \Rightarrow M_y = N_x \Rightarrow \text{ la ecuación diferencial es exacta.}$$

Entonces existe una función $f(x, y)$ tal que $f_x = M$ & $f_y = N$.
Resolvemos la ecuación diferencial exacta

$$f_x = M \Rightarrow f(x, y) = \int^x M\,dx = \int^x (e^y - x)\,dx = e^y x - \frac{x^2}{2} + h(y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x, y) = xe^y - \frac{x^2}{2} + h(y). \tag{2.1}$$

Se deriva $f(x,y)$ con respecto a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + h'(y).$$

Por otra parte:

$$f_y = N \;\Rightarrow\; xe^y + h'(y) = xe^y + e^{2y} \;\Rightarrow\; h'(y) = e^{2y} \;\Rightarrow\; h(y) = \frac{1}{2}e^{2y} + C_1.$$

Sustituyendo $h(y)$ en $f(x,y)$, es decir en (2.1):

$$f(x,y) = xe^y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{2y} + C_1.$$

Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$f(x,y) = C_2 \;\Rightarrow\; xe^y - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}e^{2y} + C_1 = C_2 \;\Rightarrow\; 2xe^y - x^2 + e^{2y} = C.$$

□

Ejemplo 2.8.2 *Resolver la ED* $\quad (x^2 + xy + 3y^2)\,dx - (x^2 + 2xy)\,dy = 0.$

▼ Análisis. Notamos que en la ecuación diferencial no hay funciones trascendentes y además que todos los términos o sumandos que se tienen son del mismo grado, en este caso 2. Podemos decir entonces que la ecuación diferencial es homogénea.

Resolvemos la homogénea escribiéndola como $\dfrac{dy}{dx} = F\left(\dfrac{y}{x}\right)$ o bien como $\dfrac{dx}{dy} = F\left(\dfrac{x}{y}\right)$. Decidimos la primera forma (con x como variable independiente).

$$(x^2 + xy + 3y^2)\,dx - (x^2 + 2xy)\,dy = 0 \;\Rightarrow\; (x^2 + xy + 3y^2)\,dx = (x^2 + 2xy)\,dy \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + xy + 3y^2}{x^2 + 2xy} = \frac{x^2\left(1 + \dfrac{y}{x} + 3\dfrac{y^2}{x^2}\right)}{x^2\left(1 + 2\dfrac{y}{x}\right)} = \frac{1 + \dfrac{y}{x} + 3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1 + \dfrac{y}{x} + 3\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}{1 + 2\left(\dfrac{y}{x}\right)}.$$

Si $w = \dfrac{y}{x}$, entonces $y = xw$ & $\dfrac{dy}{dx} = x\dfrac{dw}{dx} + w$. Al sustituir se obtiene:

$$x\frac{dw}{dx} + w = \frac{1 + w + 3w^2}{1 + 2w} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\frac{dw}{dx} = \frac{1 + w + 3w^2}{1 + 2w} - w = \frac{1 + w + 3w^2 - w - 2w^2}{1 + 2w} = \frac{1 + w^2}{1 + 2w} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\,dw = \frac{1 + w^2}{1 + 2w}\,dx \;\Rightarrow\; \frac{1 + 2w}{1 + w^2}\,dw = \frac{dx}{x}.$$

Después de separar las variables, integramos

$$\int \frac{1 + 2w}{1 + w^2}\,dw = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int \left(\frac{1}{1 + w^2} + \frac{2w}{1 + w^2}\right) dw = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \arctan w + \ln(1 + w^2) - \ln x = C.$$

Pero $w = \dfrac{y}{x}$, por lo tanto:

$$\arctan\frac{y}{x} + \ln\left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) - \ln x = C \;\Rightarrow\; \arctan\frac{y}{x} + \ln\left(\frac{x^2+y^2}{x^2}\right) - \ln x = C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \arctan\frac{y}{x} + \ln(x^2+y^2) - \ln x^2 - \ln x = C \;\Rightarrow\; \arctan\frac{y}{x} + \ln(x^2+y^2) - 2\ln x - \ln x = C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \arctan\frac{y}{x} + \ln(x^2+y^2) - 3\ln x = C,$$

que es la solución general de la ED. □

Ejemplo 2.8.3 *Resolver el PVI* $\quad ye^{\frac{x}{y}}\,dx = (y + xe^{\frac{x}{y}})\,dy; \quad$ *con* $x(1) = 0$.

▼ Análisis. En la ecuación diferencial la función exponencial aparece con el exponente $\dfrac{x}{y}$. Sin dudarlo pensamos en una ecuación diferencial homogénea con el cambio de variable $w = \dfrac{x}{y}$. Expresamos esta ecuación diferencial en la forma $\dfrac{dx}{dy} = F\left(\dfrac{x}{y}\right)$:

$$ye^{\frac{x}{y}}\,dx = \left(y + xe^{\frac{x}{y}}\right)dy \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dy} = \frac{y + xe^{\frac{x}{y}}}{ye^{\frac{x}{y}}} = \frac{y}{ye^{\frac{x}{y}}} + \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{ye^{\frac{x}{y}}} = e^{-\frac{x}{y}} + \frac{x}{y}.$$

Si $w = \dfrac{x}{y}$, entonces $x = yw$ & $\dfrac{dx}{dy} = y\dfrac{dw}{dy} + w$. Al sustituir en la ED, se obtiene:

$$y\frac{dw}{dy} + w = e^{-w} + w \;\Rightarrow\; y\frac{dw}{dy} = e^{-w} \;\Rightarrow\; e^{w}\,dw = \frac{dy}{y}.$$

Integrando:

$$\int e^{w}\,dw = \int\frac{dy}{y} \;\Rightarrow\; e^{w} + C_1 = \ln y + C_2 \;\Rightarrow\; e^{w} = \ln y + C.$$

Pero $w = \dfrac{x}{y}$, entonces:

$$e^{\frac{x}{y}} = \ln y + C, \text{ que es la solución general de la ED.}$$

Ahora $x(1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$ & $y = 1$. Luego:

$$e^{\frac{0}{1}} = \ln 1 + C \;\Rightarrow\; 1 = 0 + C \;\Rightarrow\; C = 1.$$

Por lo tanto, la solución del PVI es

$$e^{\frac{x}{y}} = \ln y + C, \text{ con } C = 1 \;\Rightarrow\; e^{\frac{x}{y}} = \ln y + 1,$$

que se puede expresar como:

$$e^{\frac{x}{y}} = \ln y + \ln e \;\Rightarrow\; e^{\frac{x}{y}} = \ln(ye) \;\Rightarrow\; \frac{x}{y} = \ln[\ln(ey)] \;\Rightarrow\; x = y\ln[\ln(ey)].$$

□

Ejemplo 2.8.4 *Resolver la ED* $(2y\,\text{sen}\,x - \tan x)\,dx + (1 - \cos x)\,dy = 0.$

▼ Análisis. En esta ecuación diferencial hay funciones trigonométricas cuyos argumentos no son $\dfrac{y}{x}$ ni $\dfrac{x}{y}$, por lo cual concluimos que la ecuación diferencial no es homogénea.
El coeficiente $(2y\,\text{sen}\,x - \tan x)$ de la diferencial dx no depende sólo de y, entonces descartamos que la ecuación diferencial sea lineal para $x = \phi(y)$. Pero el coeficiente $(1 - \cos x)$ de la diferencial dy depende solamente de x, entonces la ecuación diferencial puede ser lineal o bien de Bernoulli para $y = \phi(x)$.
Reescribiendo la ED:

$$(2y\,\text{sen}\,x - \tan x)\,dx + (1 - \cos x)\,dy = 0 \Rightarrow (2y\,\text{sen}\,x - \tan x) + (1 - \cos x)\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 - \cos x)\frac{dy}{dx} + (2y\,\text{sen}\,x) = \tan x \Rightarrow y' + \frac{2\,\text{sen}\,x}{1 - \cos x}y = \frac{\tan x}{1 - \cos x}.$$

La anterior es una ecuación diferencial lineal normalizada de la forma $y' + p(x)y = q(x)$; la resolvemos así:

$$p(x) = \frac{2\,\text{sen}\,x}{1 - \cos x} \Rightarrow \int p(x)\,dx = \int \frac{2\,\text{sen}\,x}{1 - \cos x}\,dx = 2\ln(1 - \cos x).$$

Un factor integrante es

$$e^{\int p(x)\,dx} = e^{2\ln(1-\cos x)} = e^{\ln(1-\cos x)^2} = (1 - \cos x)^2.$$

Multiplicamos la ED por este factor integrante:

$$(1 - \cos x)^2\left[y' + \frac{2\,\text{sen}\,x}{1 - \cos x}y\right] = (1 - \cos x)^2\frac{\tan x}{1 - \cos x}.$$

Usamos la igualdad conocida:

$$\frac{d}{dx}\left[(1 - \cos x)^2 y\right] = (1 - \cos x)\tan x = \tan x - \text{sen}\,x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (1 - \cos x)^2 y = \int (\tan x - \text{sen}\,x)\,dx = \ln(\sec x) + \cos x + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{\ln(\sec x) + \cos x + C}{(1 - \cos x)^2},$$

que es la solución general de la ED.

□

Ejemplo 2.8.5 *Resolver la ED* $(e^x + 1)^2 e^y\,dy - (e^y + 1)^3 e^x\,dx = 0.$

▼ Análisis. Notamos que los coeficientes de las diferenciales dx & dy son productos de funciones de una sola variable; es decir, las variables están separadas. No hay duda de que es una ecuación diferencial de variables separables.

$$(e^x + 1)^2 e^y\,dy - (e^y + 1)^3 e^x\,dx = 0 \Rightarrow (e^x + 1)^2 e^y\,dy = (e^y + 1)^3 e^x\,dx \Rightarrow \frac{e^y}{(e^y + 1)^3}\,dy = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\,dx.$$

Integrando:

$$\int \frac{e^y}{(e^y + 1)^3}\,dy = \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2}\,dx \Rightarrow \int (e^y + 1)^{-3} e^y\,dy = \int (e^x + 1)^{-2} e^x\,dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{(e^y + 1)^{-2}}{-2} + C_1 = \frac{(e^x + 1)^{-1}}{-1} + C_2 \Rightarrow -\frac{1}{2(e^y + 1)^2} + \frac{1}{e^x + 1} = C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{2(e^y + 1)^2} = C,$$

que es la solución general de la ED.

□

Ejemplo 2.8.6 *Resolver la ED* $xy' - (x+1)y = x^2y^2$.

▼ Análisis. Basta recordar la definición de una ecuación diferencial de Bernoulli para darnos cuenta de que esta ecuación diferencial es de ese tipo. En efecto:

$$xy' - (x+1)y = x^2y^2 \;\Rightarrow\; y' - \frac{x+1}{x}y = xy^2,$$

que es de la forma $y' + p(x)y = q(x)y^n$. Entonces, la resolvemos:

$$y^{-2}\left[y' - \frac{x+1}{x}y\right] = xy^2y^{-2} \;\Rightarrow\; y^{-2}y' - \frac{x+1}{x}y^{-1} = x.$$

Efectuamos el cambio de variable y derivamos:

$$w = y^{-1} \;\Rightarrow\; \frac{dw}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; y^{-2}y' = -w'.$$

Al sustituir:

$$-w' - \frac{x+1}{x}w = x \;\Rightarrow\; w' + \frac{x+1}{x}w = -x. \tag{2.2}$$

Hemos obtenido una ecuación diferencial lineal. Calculamos ahora su factor integrante:

$$e^{\int \frac{x+1}{x}\,dx} = e^{\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx} = e^{x+\ln x} = e^x e^{\ln x} = e^x x = xe^x.$$

Luego, multiplicando (2.2) por el factor integrante xe^x:

$$xe^x\left(w' + \frac{x+1}{x}w\right) = -x^2e^x \;\Rightarrow$$

(y usando la igualdad conocida):

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xe^x w) = -x^2e^x \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow xe^x w = -\int x^2e^x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xe^x w = -\left[x^2e^x - \int 2xe^x\,dx\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow xe^x w = -x^2e^x + 2\int xe^x\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow xe^x w = -x^2e^x + 2\left[xe^x - \int e^x\,dx\right] \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow xe^x w = -x^2e^x + 2xe^x - 2e^x + C \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \frac{C - e^x(x^2 - 2x + 2)}{xe^x}.$$

Integrando por partes:

$$u = x^2 \;\Rightarrow\; du = 2x\,dx;$$
$$dv = e^x\,dx \;\Rightarrow\; v = e^x.$$

Integrando por partes:

$$u = x \;\Rightarrow\; du = dx;$$
$$dv = e^x\,dx \;\Rightarrow\; v = e^x.$$

Finalmente, considerando que $w = y^{-1} = \dfrac{1}{y}$, hallamos:

$$\frac{1}{y} = \frac{C - e^x(x^2-2x+2)}{xe^x} \;\Rightarrow\; y = \frac{xe^x}{C - e^x(x^2-2x+2)},$$

que es la solución general de la ED.

□

Ejemplo 2.8.7 *Resolver la ED* $(xy - 2y + x - 2)\,dy = (xy + 3y - x - 3)\,dx.$

▼ Análisis. Esta ecuación diferencial no es homogénea, ya que sus términos no son del mismo grado. Las funciones que acompañan a las diferenciales dx & dy dependen de ambas variables, lo que nos hace pensar que la ecuación diferencial no es lineal ni de Bernoulli. Parece no ser de variables separables ya que no es evidente que los coeficientes de las diferenciales dx & dy sean productos o cocientes de funciones que dependan de una sola variable.
Veamos si la ED es exacta:

$$(xy - 2y + x - 2)\,dy = (xy + 3y - x - 3)\,dx \;\Rightarrow\; (xy + 3y - x - 3)\,dx - (xy - 2y + x - 2)\,dy = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (xy + 3y - x - 3)\,dx + (-xy + 2y - x + 2)\,dy = 0.$$

Tenemos entonces:

$$\left.\begin{array}{ll} M = xy + 3y - x - 3 & \Rightarrow\; M_y = x + 3 \\ N = -xy + 2y - x + 2 & \Rightarrow\; N_x = -y - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow\; M_y \neq N_x \;\Rightarrow\; \text{la ecuación diferencial no es exacta.}$$

Veamos si tiene un factor integrante que dependa sólo de una variable:

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{x + 3 + y + 1}{-xy + 2y - x + 2} = \frac{x + y + 4}{-xy + 2y - x + 2} \neq g(x) \;\Rightarrow\; \text{no existe factor integrante } \mu(x).$$
$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{-y - 1 - x - 3}{xy + 3y - x - 3} = \frac{-x - y - 4}{xy + 3y - x - 3} \neq g(y) \;\Rightarrow\; \text{no existe factor integrante } \mu(y).$$

¿De qué tipo es esta ecuación diferencial? Revisamos de nuevo para ver si es de variables separables.
Ya que

$$xy - 2y + x - 2 = (xy - 2y) + (x - 2) = y(x - 2) + 1(x - 2) = (x - 2)(y + 1);$$

y además

$$xy + 3y - x - 3 = (xy + 3y) + (-x - 3) = y(x + 3) - 1(x + 3) = (x + 3)(y - 1).$$

Entonces:

$$(xy - 2y + x - 2)\,dy = (xy + 3y - x - 3)\,dx \;\Rightarrow\; (x - 2)(y + 1)\,dy = (x + 3)(y - 1)\,dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{y + 1}{y - 1}\,dy = \frac{x + 3}{x - 2}\,dx$$

es una ED de variables separables, por lo que, integrando:

$$\int \frac{y + 1}{y - 1}\,dy = \int \frac{x + 3}{x - 2}\,dx.$$

Efectuando ambas divisiones e integrando:

$$\int \left(1 + \frac{2}{y - 1}\right) dy = \int \left(1 + \frac{5}{x - 2}\right) dx \;\Rightarrow\; y + 2\ln(y - 1) + C_1 = x + 5\ln(x - 2) + C_2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y + \ln(y - 1)^2 = x + \ln(x - 2)^5 + C_2 - C_1 \;\Rightarrow\; y + \ln(y - 1)^2 - x - \ln(x - 2)^5 = C,$$

que es la solución general de la ED.

□

Ejemplo 2.8.8 *Resolver la ED* $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{2\tan x \operatorname{sen} 2y}{\cos 2y - \operatorname{sen} x}$.

▼ Análisis. Al ver los argumentos de las funciones trigonométricas podemos afirmar que la ecuación no es homogénea. Si reescribimos la ecuación como

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2\tan x \operatorname{sen} 2y}{\cos 2y - \operatorname{sen} x} \;\Rightarrow\; (\cos 2y - \operatorname{sen} x)\,dx = (2\tan x \operatorname{sen} 2y)\,dy \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\cos 2y - \operatorname{sen} x)\,dx - (2\tan x \operatorname{sen} 2y)\,dy = 0, \tag{2.3}$$

y si tenemos en cuenta que los coeficientes de las diferenciales dx & dy dependen ambos de las 2 variables x & y, podemos decir que esta ecuación diferencial no es lineal, ni tampoco de Bernoulli, ya sea para $y = \phi(x)$ o bien para $x = \phi(y)$.
Podemos decir que la ecuación diferencial no parece ser de variables separables, ya que el coeficiente de dx no es producto de funciones dependientes de una sola variable. Veamos si de trata de una ED exacta.
Tenemos ahora, de (2.3):

$$\left.\begin{array}{ll} M = \cos 2y - \operatorname{sen} x & \Rightarrow\; M_y = -2\operatorname{sen} 2y \\ N = -2\tan x \operatorname{sen} 2y & \Rightarrow\; N_x = -2\sec^2 x \operatorname{sen} 2y \end{array}\right\} \Rightarrow\; M_y \neq N_x \;\Rightarrow\; \text{la ED no es exacta.}$$

¿Tendrá un factor integrante dependiente de una sola variable?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-2\operatorname{sen} 2y + 2\sec^2 x \operatorname{sen} 2y}{-2\tan x \operatorname{sen} 2y} = \frac{2(\operatorname{sen} 2y)(\sec^2 x - 1)}{-2\tan x \operatorname{sen} 2y} =$$
$$= \frac{\sec^2 x - 1}{-\tan x} = \frac{\tan^2 x}{-\tan x} = -\tan x = g(x).$$

En vista de lo anterior existe un factor integrante $\mu = \mu(x)$ dado por

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = g(x) = -\tan x \;\Rightarrow\; \int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\,dx = \int -\tan x\,dx = \int \frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \ln \mu(x) = \ln(\cos x) \;\Rightarrow\; \mu(x) = \cos x.$$

Multiplicando la ecuación diferencial no exacta (2.3) por $\mu(x) = \cos x$:

$$\cos x(\cos 2y - \operatorname{sen} x)\,dx - 2\cos x \tan x \operatorname{sen} 2y\,dy = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (\cos x \cos 2y - \operatorname{sen} x \cos x)\,dx - 2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2y\,dy = 0.$$

Vemos ahora que

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{M} = \cos x \cos 2y - \operatorname{sen} x \cos x & \Rightarrow\; \overline{M_y} = -2\cos x \operatorname{sen} 2y \\ \overline{N} = -2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2y & \Rightarrow\; \overline{N_x} = -2\cos x \operatorname{sen} 2y \end{array}\right\} \Rightarrow\; \overline{M_y} = \overline{N_x}.$$

La nueva ecuación diferencial es exacta. Entonces existe una función $f(x, y)$ tal que $f_x = \overline{M}$ & $f_y = \overline{N}$.
Ahora bien, integrando con respecto a y:

$$f_y = \overline{N} \;\Rightarrow f(x, y) = \int^y \overline{N}\,dy = \int^y -2\operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2y\,dy = \operatorname{sen} x \int -2\operatorname{sen} 2y\,dy \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x, y) = \operatorname{sen} x \cos 2y + h(x). \tag{2.4}$$

Derivando con respecto a x:

$$f_x = \cos x \cos 2y + h'(x).$$
$$f_x = \overline{M} \;\Rightarrow\; \cos x \cos 2y + h'(x) = \cos x \cos 2y - \operatorname{sen} x \cos x \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; h'(x) = -\operatorname{sen} x \cos x \;\Rightarrow\; h(x) = \int (\cos x)(-\operatorname{sen} x)\,dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; h(x) = \frac{1}{2}\cos^2 x + C_1.$$

Sustituyendo $h(x)$ en (2.4):

$$f(x,y) = \operatorname{sen} x \cos 2y + \frac{1}{2}\cos^2 x + C_1 .$$

Por lo tanto la solución general de la ecuación diferencial es:

$$f(x,y) = C_2 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} x \cos 2y + \frac{1}{2}\cos^2 x + C_1 = C_2 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cos 2y + \cos^2 x = C.$$

□

Ejemplo 2.8.9 *Resolver la ED* $\quad y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0.$

▼ Análisis. Al observar el exponente de e^{-2y} podemos afirmar que la ecuación diferencial no es homogénea. Por otro lado, notamos que el coeficiente correspondiente a la diferencial dx es una función que depende sólo de la variable y, así podemos pensar que es una ecuación diferencial lineal o bien de Bernoulli para $x = \phi(y)$. Veamos:

$$y\,dx + (2xy - e^{-2y})\,dy = 0 \;\Rightarrow\; y\,dx = -(2xy - e^{-2y})\,dy \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y\frac{dx}{dy} = -2xy + e^{-2y} \;\Rightarrow\; y\frac{dx}{dy} + 2xy = e^{-2y} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow yx' + 2yx = e^{-2y} \;\Rightarrow\; x' + 2x = \frac{e^{-2y}}{y},$$

que es, en efecto, una ecuación diferencial lineal para $x = \phi(y)$.
Un factor integrante para esta ecuación diferencial es $\mu(y) = e^{2y}$. Multiplicando la ecuación diferencial por este factor integrante, se obtiene:

$$e^{2y}[x' + 2x] = \cancel{e^{2y}}\left(\frac{\cancel{e^{-2y}}}{y}\right) \;\Rightarrow\; \frac{d}{dy}(e^{2y}x) = \frac{1}{y} \;\Rightarrow\; e^{2y}x = \int \frac{1}{y}\,dy \;\Rightarrow\; e^{2y}x = \ln y + C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x = (\ln y + C)e^{-2y},$$

que es la solución general de la ED.

□

Ejemplo 2.8.10 *Resolver la ED* $\quad e^x\,dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)\,dy = 0.$

▼ Análisis. Al ver el exponente de la exponencial e^x, podemos afirmar que la ecuación diferencial no es homogénea. Observando los coeficientes de las diferenciales dx & dy, podemos decir que esta ecuación diferencial no es lineal, ni de Bernoulli, ya sea para $y = \phi(x)$ o bien para $x = \phi(y)$. Así, debido a que el coeficiente de la diferencial dy no es un producto de funciones que dependan de una sola variable, podemos decir que la ecuación diferencial no es de variables separables. Veamos entonces si se trata de una ED exacta.
De la ecuación diferencial

$$e^x\,dx + (e^x \cot y + 2y \csc y)\,dy = 0, \tag{2.5}$$

obtenemos:

$$\left.\begin{array}{ll} M = e^x & \Rightarrow\; M_y = 0 \\ N = e^x \cot y + 2y \csc y & \Rightarrow\; N_x = e^x \cot y \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; M_y \neq N_x \;\Rightarrow\; \text{la ecuación diferencial no es exacta.}$$

¿Tendrá un factor integrante dependiente de una sola variable?

$$\frac{M_y - N_x}{N} = \frac{-e^x \cot y}{e^x \cot y + 2y \csc y} \neq g(x) \;\Rightarrow\; \text{no existe factor integrante } \mu = \mu(x).$$

Pero
$$\frac{N_x - M_y}{M} = \frac{e^x \cot y}{e^x} = \cot y = g(y).$$
Entonces existe factor integrante $\mu = \mu(y)$ dado por
$$\frac{\mu'(y)}{\mu(y)} = g(y) = \cot y \;\Rightarrow\; \int \frac{\mu'(y)}{\mu(y)}\,dy = \int \cot y\,dy = \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln \mu(y) = \ln(\operatorname{sen} y) \;\Rightarrow\; \mu(y) = \operatorname{sen} y.$$
Multiplicando la ecuación diferencial no exacta (2.5) por $\mu(y) = \operatorname{sen} y$:
$$e^x \operatorname{sen} y\,dx + (e^x \cot y + 2y \csc y) \operatorname{sen} y\,dy = 0 \;\Rightarrow e^x \operatorname{sen} y\,dx + \left(e^x \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y} + 2y \frac{1}{\operatorname{sen} y}\right) \operatorname{sen} y\,dy = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^x \operatorname{sen} y\,dx + (e^x \cos y + 2y)\,dy = 0. \tag{2.6}$$
Y ahora:
$$\left.\begin{array}{ll} \overline{M} = e^x \operatorname{sen} y & \Rightarrow \overline{M}_y = e^x \cos y \\ \overline{N} = e^x \cos y + 2y & \Rightarrow \overline{N}_x = e^x \cos y \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{M}_y = \overline{N}_x \;\Rightarrow\; \text{la nueva ED (2.6) es exacta.}$$
Entonces existe una función $f(x, y)$ tal que $f_x = \overline{M}$ & $f_y = \overline{N}$.
Integrando con respecto a x:
$$f_x = \overline{M} \;\Rightarrow f(x, y) = \int^x \overline{M}\,dx = \int^x e^x \operatorname{sen} y\,dx = (\operatorname{sen} y)e^x + h(y) \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + h(y). \tag{2.7}$$
Derivando con respecto a y:
$$f_y = e^x \cos y + h'(y).$$
Luego:
$$f_y = \overline{N} \;\Rightarrow e^x \cos y + h'(y) = e^x \cos y + 2y \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow h'(y) = 2y \;\Rightarrow\; h(y) = y^2 + C_1.$$
Al sustituir $h(y)$ en (2.7):
$$f(x, y) = e^x \operatorname{sen} y + y^2 + C_1.$$
Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial exacta, así como de la no exacta es
$$f(x, y) = C_2 \;\Rightarrow\; e^x \operatorname{sen} y + y^2 + C_1 = C_2 \;\Rightarrow\; e^x \operatorname{sen} y + y^2 = C.$$

□

Ejercicios 2.8.1 *Miscelánea.* *Soluciones en la página 12*
Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales, algunas de las cuales pueden resolverse de varias formas.

1. $(y^2 + xy^2)y' + x^2 - yx^2 = 0.$
2. $(1 - 2x^2 - 2y)y' = 4x^3 + 4xy.$
3. $\left(x + ye^{\frac{y}{x}}\right) dx - xe^{\frac{y}{x}}\,dy = 0, \quad$ con $y(1) = 0.$
4. $y\dfrac{dx}{dy} = e^{-3y} - (3y + 1)x.$
5. $(x + \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y)\,dx + (\cos y)\,dy = 0.$

6. $\left(3x^2y+e^y\right)dx+\left(x^3+xe^y-3y^2\right)dy=0.$
7. $(1+y^2)(e^{2x}\,dx-e^y\,dy)-(1+y)\,dy=0.$
8. $(1-\cos x)y'=\tan x-2y\operatorname{sen}x.$
9. $2xy\ln y\,dx+\left(x^2+y^2\sqrt{y^2+1}\right)dy=0.$
10. $(x+y)\,dy+(x-y)\,dx=0.$
11. $x^2y'=3y^4+2xy,\quad \text{con } y(1)=\dfrac{1}{2}.$
12. $\left(x^4\ln x-2xy^3\right)dx+\left(3x^2y^2\right)dy=0.$
13. $(\cos x+\tan y\cos x)\,dx+(\operatorname{sen}x-1)\sec^2 y\,dy=0.$
14. $(e^x\operatorname{sen}y-2y\operatorname{sen}x-\ln x)\,dx+(e^x\cos y+2\cos x-\ln y)\,dy=0.$
15. $(x+1)y'+(x+2)y=2xe^{-x}.$
16. $\left(y^3+x^2y\right)dy+\left(xy^2+x^3\right)dx=0.$
17. $xy\,dx-x^2\,dy=y\sqrt{x^2+y^2}\,dy,\quad \text{con } y(1)=1.$
18. $(ye^{xy}\cos 2x-2e^{xy}\operatorname{sen}2x+2x)\,dx+(xe^{xy}\cos 2x-3)\,dy=0.$
19. $\left(x^2+y^2\right)dy+\left(3x^2y+2xy+y^3\right)dx=0.$
20. $(xy-2x+4y-8)\,dy=(xy+3x-y-3)\,dx.$
21. $\left(y\tan x-\cos^2 x\right)dx+\,dy=0,\quad \text{con } y(0)=-1.$
22. $dy=\left(y-y^2\right)dx.$
23. $xy\left(1+xy^2\right)y'=1,\quad \text{con } y(1)=0.$

Ejercicios 2.8.1 *Miscelánea.* *Página 10*

1. $2\ln\left(\frac{1+x}{1-y}\right)+x^2-y^2-2x-2y=C.$
2. $x^4+2x^2y+y^2-y=C.$
3. $\ln(ex)=e^{\frac{y}{x}}.$
4. $x=e^{-3y}+Cy^{-1}e^{-3y}.$
5. $2\operatorname{sen} y+2(x-1)+\operatorname{sen} x-\cos x=Ce^{-x}.$
6. $x^3y+xe^y-y^3=C.$
7. $e^{2x}=2e^y+2\arctan y+\ln(1+y^2)+C.$
8. $y=[\ln(\sec x)+\cos x+C](1-\cos x)^{-2}.$
9. $x^2\ln y+\frac{1}{3}(y^2+1)^{\frac{3}{2}}=C.$
10. $2\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\ln(x^2+y^2)=C.$
11. $5x^6y^{-3}=-9x^5+49.$
12. $\frac{y^3}{x^2}+x\ln(x)-x=C.$
13. $\operatorname{sen} x+\tan y\operatorname{sen} x-\tan y=C.$
14. $e^x\operatorname{sen} y+2y\cos x-x\ln(x)+x-y\ln(y)+y=C.$
15. $y=\frac{x^2}{x+1}e^{-x}+\frac{C}{x+1}e^{-x}.$
16. $x^2+y^2=C.$
17. $\ln y=\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{y}-\sqrt{2}.$
18. $e^{xy}\cos 2x-3y+x^2=C.$
19. $x^2ye^{3x}+\frac{1}{3}y^3e^{3x}=C.$
20. $5\ln\left(\frac{x+4}{y+3}\right)=x-y+C.$
21. $y=\cos x\operatorname{sen} x-\cos x.$
22. $y=\frac{Ce^x}{1+Ce^x}.$
23. $x^{-1}=-y^2+2-e^{-\frac{y^2}{2}}.$