CAPÍTULO

2

Métodos de solución de ED de primer orden

2.9 Ecuaciones diferenciales reducibles a primer orden

2.9.1 Introducción

En el siguiente ejemplo aparece una ecuación diferencial de orden mayor que uno. Esta ED nos va a permitir hallar la solución a la siguiente situación: lanzamos una piedra hacia arriba, lo hacemos con toda la fuerza de la que disponemos; la piedra inicia un ascenso rápido; a medida que pasa el tiempo, la velocidad de la piedra disminuye hasta llegar a cero; en ese momento la piedra alcanza su altura máxima y empieza su descenso.
No importa qué tan fuerte la hayamos lanzado, la piedra regresará a la superficie de la Tierra por efecto de la fuerza de atracción gravitacional.
Veamos la situación con otros ojos; imaginemos ahora que alguien decide disparar un tiro vertical hacia arriba con una pistola, todos sabemos que la velocidad de la bala es enorme, pero ¿será suficiente su velocidad como para no retornar a la superficie tal y como lo haría la piedra? Por sorprendente que parezca, la respuesta es no.
Entonces, ¿qué velocidad se requiere para escapar de la atracción terrestre?
Vivimos en una época en la que los viajes al espacio ya no son una ilusión sino una realidad, y es evidente que para realizar un viaje así es fundamental responder a la pregunta formulada. Pues bien, el planteamiento y análisis de una ED de segundo orden nos dará una respuesta satisfactoria a nuestra pregunta, como veremos a continuación.

Ejemplo 2.9.1 *Determinar la velocidad de escape de un cuerpo de masa m, es decir, hallar la mínima velocidad con la cual podamos asegurar que un cuerpo, una vez que la alcance, no regresará a la superficie de la Tierra.*

▼ De lo tratado en la introducción, necesitamos una ley que nos permita determinar la atracción gravitatoria entre dos cuerpos; esta ley existe por supuesto y se conoce como la ley de Gravitación Universal de Newton la cual establece que, en magnitud, la fuerza de atracción entre dos cuerpos es directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que separa

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

sus centros de gravedad. En símbolos, si m representa la masa del cuerpo, M la masa de la Tierra y r la distancia entre sus centros de gravedad, entonces, en magnitud, la fuerza F de atracción entre m y M es

$$F = G\frac{mM}{r^2}$$

donde la G representa la constante de gravitación universal cuyo valor es 6.67×10^{-11} N· m^2/kg^2; esta constante fue hallada por Cavendish .
Ahora bien, por la segunda ley de Newton, la ecuación anterior puede escribirse como

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -G\frac{mM}{r^2},$$

donde el signo negativo indica que la fuerza es de atracción y no de repulsión. Esta última expresión es una ecuación diferencial de segundo orden.
La condición inicial del problema exige que $r(0) = R$, donde $R \approx 6\,340$ km representa el radio de la Tierra.
Observemos que la masa m del cuerpo se elimina en ambos miembros de la anterior ecuación, de donde se deduce inmediatamente que la velocidad de escape de la Tierra es la misma para cualquier cuerpo.
Existen varias técnicas para resolver ecuaciones como la anterior; en esta sección veremos la que corresponde al método de reducción de orden, éste consiste en grandes rasgos en un cambio de variable que reduce la ED a una de orden inferior. En nuestro caso, introducimos un cambio que parece muy natural, a saber: $v = \dfrac{dr}{dt}$, donde v representa la velocidad instantánea del cuerpo en cuestión.
Así, resolveremos el problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2r}{dt^2} = -G\dfrac{M}{r^2}; \\ r(0) = R; \end{cases} \quad \text{o equivalentemente:} \quad \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = -G\dfrac{M}{r^2}; \\ r(0) = R. \end{cases}$$

La última ecuación diferencial entraña dos dificultades:

1. Aparecen en la ecuación tres variables: v, r, t.
2. Puesto que la variable dependiente es v, la condición inicial es $v(0) = v_e$ que es la velocidad de escape.
   Estamos considerando que al tiempo $t = 0$ se obtiene la velocidad de escape v_e y que ésta se alcanza a ras de la superficie terrestre.

Para resolver la primera dificultad, usamos la regla de la Cadena, la cual en la notación de Leibniz establece que

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{dv}{dr}\right)\left(\frac{dr}{dt}\right) = v\frac{dv}{dr}.$$

Así, nuestro problema lo hemos transformado al siguiente PVI:

$$\begin{cases} v\dfrac{dv}{dr} = -G\dfrac{M}{r^2}; \\ v(0) = v_e. \end{cases}$$

El PVI anterior representa un problema con una ED de orden uno que podemos resolver por separación de variables:

$$v\frac{dv}{dr} = -G\frac{M}{r^2} \Rightarrow vdv = -GMr^{-2}dr \Rightarrow \int vdv = -GM\int r^{-2}dr.$$

Al integrar, hallamos

$$\frac{v^2}{2} + C_1 = -GM\left(\frac{r^{-1}}{-1}\right) + C_2 \Rightarrow \frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} + C. \tag{2.1}$$

De la condición inicial en $t = 0$, sabemos que $r(0) = R$ y que $v(0) = v_e$, por lo cual

$$\frac{v_e^2}{2} = \frac{GM}{R} + C \;\Rightarrow\; C = \frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R}.$$

Si ahora sustituimos por el valor de C en la ecuación (**??**), obtenemos

$$\frac{v^2}{2} = \frac{GM}{r} + \frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R}.$$

Volvamos a la pregunta: se solicita determinar la velocidad de escape.
Para ello, lo que se quiere es que $v(t)$ sea siempre positiva (para que m no se detenga) cuando $r \to \infty$. Pero

$$v = \sqrt{2\left(\frac{GM}{r} + \frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R}\right)} \;\Rightarrow\; \lim_{r\to\infty} v = \lim_{r\to\infty} \sqrt{2\left(\frac{GM}{r} + \frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R}\right)} = \sqrt{2\left(\frac{v_e^2}{2} - \frac{GM}{R}\right)}.$$

Una revisión de la última igualdad nos hará ver que lo que se requiere se consigue si $\dfrac{v_e^2}{2} - \dfrac{GM}{R} \geq 0$.

Por lo tanto, si buscamos la velocidad mínima de escape, será suficiente con exigir que $\dfrac{v_e^2}{2} - \dfrac{GM}{R} = 0$, ecuación de la que se desprende la expresión

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}.$$

Para el caso de la Tierra, si aplicamos valores, esto es, $G = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$, $M = 5.98 \times 10^{24}$ kg y $R = 6\,370$ km, hallamos que $v_e = 11.194$ km/s.
Observe que los datos de la Tierra los utilizamos al final, esto significa que la fórmula puede ser aplicada a cualquier cuerpo celeste, por ejemplo:

1. En la Luna la velocidad de escape es de 2.37 km/s, muy inferior a la de nuestro planeta, pero suficiente con creces para impedir que un astronauta se ponga en órbita si da inadvertidamente un salto.
2. La velocidad de escape es de 4.32 km/s en Mercurio; 10.15 en Venus; 5.07 en Marte; 59.5 en Júpiter; 35.5 en Saturno; 21.3 en Urano; 23.5 en Neptuno; y 1.22 en Plutón.
3. En el Sol, la velocidad de escape es muy superior: 616 km/s.

□

Observe que en la solución de este problema, originalmente se tiene una ED de segundo orden, la que pudimos resolver gracias a que fue transformada a una ED de primer orden. Es decir, en la solución del problema fue determinante reducir el orden de la ED original (de orden 2 a orden 1), lo que fue posible debido a un adecuado cambio de variable.

2.9.2 Reducción de orden

Trataremos ahora con dos tipos de ED de segundo orden, que pueden ser reducidas a ED de primer orden mediante cambios de variable adecuados y se resuelven aplicando procedimientos particulares.

1. Ecuaciones diferenciales del tipo $F(x, y', y'') = 0$.

   En este tipo de ED la variable independiente x aparece explícitamente en la ecuación, pero no así la variable dependiente y, de la cual aparecen solamente sus derivadas y' & y''.

   Ejemplo 2.9.2 *La ED* $xy'' = y' \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$ *es del tipo que venimos explicando.*

2. Ecuaciones diferenciales de la forma $F(y, y', y'') = 0$.
   En estas ED, la variable independiente x no aparece explícitamente en la ecuación.

   Ejemplo 2.9.3 *La ED* $1 + (y')^2 = 2yy''$ *pertenece a este caso.*

Ahora presentamos una tabla que resume el tratamiento que debe darse a cada uno de los tipos de ED mencionados, para llegar a su solución:

Tipo de ED	Cambio de variable	Aplicación de la regla de la Cadena
$F(x, y', y'')$	$u = y'$	No aplica
$F(y, y', y'')$	$u = y'$	$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{du}{dx} = \dfrac{du}{dy}\dfrac{dy}{dx} = u\dfrac{du}{dy}$

A continuación presentamos algunos ejemplos sobre el método reducción de orden que abarcan los dos casos anteriores.

Ejemplo 2.9.4 *Resolver la ED* $\quad xy'' = y' \ln\left(\dfrac{y'}{x}\right)$.

▼ Ya hemos visto, ejemplo **??**, que la ED de segundo orden planteada pertenece al primer tipo de ecuación donde la variable x aparece explícitamente dentro de la ecuación, no así la variable y.
Efectuamos el cambio de variable:

$$y' = u \;\Rightarrow\; y'' = \frac{du}{dx}.$$

Con esta sustitución, la ED conocida puede escribirse como la ED de primer orden:

$$x\frac{du}{dx} = u \ln\left(\frac{u}{x}\right).$$

Esta última ED puede ser escrita como:

$$\frac{du}{dx} = \left(\frac{u}{x}\right) \ln\left(\frac{u}{x}\right),$$

que es una ecuación diferencial homogénea. Por lo tanto, $v = \dfrac{u}{x}$ resulta ser un cambio de variable adecuado. Así,

$$v = \frac{u}{x} \;\Rightarrow\; u = vx \;\Rightarrow\; \frac{du}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}.$$

Sustituyendo, resulta

$$v + x\frac{dv}{dx} = v\ln(v);$$

tenemos ahora una ED que puede ser resuelta por el método de Separación de Variables; en efecto:

$$x\frac{dv}{dx} = v\ln(v) - v \;\Rightarrow\; \frac{dv}{v[\ln(v) - 1]} = \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \int \frac{dv}{v[\ln(v) - 1]} = \int \frac{dx}{x}.$$

Si en el miembro izquierdo ponemos $w = \ln(v) - 1$, hallamos $dw = \dfrac{dv}{v}$, por lo que

$$\int \frac{dw}{w} = \int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\; \ln[\ln(v) - 1] = \ln(x) + C.$$

Al aplicar en ambos miembros de esta igualdad la función exponencial, hallamos que

$$e^{\ln[\ln(v)-1]} = e^{\ln(x)+C} = e^{\ln(x)}e^{C} \;\Rightarrow\; \ln v - 1 = Cx.$$

Por lo tanto

$$\ln(v) = Cx + 1 \;\Rightarrow\; v = e^{Cx+1} = ee^{Cx}.$$

Ahora bien, como $v = \dfrac{u}{x}$:

$$\frac{u}{x} = ee^{Cx} \;\Rightarrow\; u = exe^{Cx},$$

pero además

$$u = \frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = exe^{Cx} \;\Rightarrow\; y = \int exe^{Cx}\,dx = e\int xe^{Cx}\,dx.$$

Por último, mediante integración por partes, hallamos que:

$$y = \frac{e}{C}xe^{Cx} - \frac{e}{C^2}e^{Cx} + C_2,$$

que es la solución general de la ecuación diferencial dada.
Si usamos $C = 0$, entonces $u = ex$; por lo tanto:

$$u = \frac{dy}{dx} \;\Rightarrow\; dy = ex\,dx \;\Rightarrow\; y = \frac{1}{2}ex^2 + C.$$

Esta solución no pertenece a la familia de la solución general: es una solución singular de la ED.

□

Ejemplo 2.9.5 *Resolver la ED* $1 + (y')^2 = 2yy''$, *con* $y(0) = 1; y'(0) = 1$.

▼ Tenemos nuevamente una ecuación de segundo orden que, de acuerdo al ejemplo **??**, es del segundo tipo de reducción debido a que no aparece la variable independiente x de manera explícita en la ecuación.
Proponemos el cambio de variable $u = y'$ y requerimos utilizar la regla de la cadena.
De esta manera (ver la tabla anterior):

$$y'' = \frac{du}{dx} = \frac{du}{dy}\frac{dy}{dx} = u\frac{du}{dy} \;\Rightarrow\; 1 + u^2 = 2yu\frac{du}{dy},$$

que es una ED de variables separables, por lo cual:

$$(1+u^2)\,dy = 2yu\,du \;\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = \frac{2udu}{1+u^2} \;\Rightarrow\; \int\frac{dy}{y} = \int\frac{2udu}{1+u^2} \;\Rightarrow\; \ln(y) = \ln(u^2+1) + C_1.$$

Aplicamos la función exponencial en ambos lados de la ecuación:

$$y = e^{\ln(u^2+1)+C_1} = e^{C_1}(u^2+1) = C(u^2+1). \tag{2.2}$$

Ahora, por las condiciones iniciales y puesto que $u = y'$ se tiene que

$$y(0) = 1 \;\&\; y'(0) = 1 \;\Rightarrow\; y(0) = 1 \;\&\; u(0) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = C(1^2+1) \;\Rightarrow\; 2C = 1 \;\Rightarrow\; C = \frac{1}{2}.$$

Sustituimos C en (**??**) y despejamos u, para buscar a y en función de x. Por lo que

$$y = \frac{1}{2}(u^2+1) \;\Rightarrow\; 2y = u^2 + 1 \;\Rightarrow\; u = \sqrt{2y-1}.$$

El signo negativo se ha descartado a fin de estar en posibilidades de cumplir la condición $y'(0) = 1$. Pero $u = y' = \dfrac{dy}{dx}$ implica que

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{2y-1} \Rightarrow \frac{dy}{\sqrt{2y-1}} = dx \Rightarrow \int \frac{dy}{\sqrt{2y-1}} = \int dx \Rightarrow \int (2y-1)^{-\frac{1}{2}}\, dy = x + C_2 \Rightarrow \sqrt{2y-1} = x + C_2.$$

Finalmente, $y(0) = 1 \;\Rightarrow\; 1 = 0 + C_2 \;\Rightarrow\; C_2 = 1$. Por lo tanto la solución del PVI es

$$\sqrt{2y-1} = x + 1 \;\Rightarrow\; y = \frac{x^2 + 2x + 2}{2}.$$

□

Ejercicios 2.9.1 *Ecuaciones reducibles a primer orden. Soluciones en la página* **??**
Resolver las ecuaciones diferenciales siguientes.

1. $xy'' + y' + x = 0$.
2. $yy'' = (y')^2$.
3. $xy'' + y' = 0$.
4. $x^2y'' + xy' = 2$.
5. $x^2y'' - xy' = 3x^3$.
6. $y'' + (y')^2 = 1$.
7. $yy'' + (y')^2 = 0$.
8. $(1+x^2)y'' - 2xy' = 0$, con $y(0) = 0$; $y'(0) = 3$.
9. $2yy'' + y^2 = (y')^2$, con $y(0) = 1$; $y'(0) = 1$.
10. $y'' + y = (y')^2$, con $y(1) = -\dfrac{1}{4}$; $y'(1) = \dfrac{1}{2}$.

Ejercicios 2.9.1 *Ecuaciones reducibles a primer orden.* *Página* **??**

1. $y = -\frac{1}{4}x^2 + C_1 \ln x + C_2$.
2. $y = C_2 e^{C_1 x}$.
3. $y = C_1 \ln x + C_2$.
4. $y = (\ln x)^2 + C_1 \ln x + C_2$.
5. $y = x^3 + C_1 x^2 + C_2$.
6. $y = \ln(C_1 e^{2x} - 1) - x + C_2$.
7. $y^2 = C_1 x + C_2$.
8. $y = 3x + x^3$.
9. $y = \operatorname{sen} x + 1$.
10. $y = \frac{x^2 - 2}{4}$.