

## Mecánica.

**E:** Una pequeña gota de aceite de 0.2 g de masa cae en el aire desde el reposo. La resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea y es de 160 dinas (din) cuando la gota cae a 40 cm/s. Determinar:

- La velocidad al cabo de  $t$  segundos.
- La posición después de  $t$  segundos.
- La velocidad límite de la gota.

**D:** ▼ En las unidades de los datos  $g = 980 \text{ cm/s}^2$ . Consideramos hacia abajo la dirección positiva.

Si  $v(t)$  es la velocidad instantánea (en cm/s) de la gota en el tiempo  $t \geq 0$ , entonces  $v(0) = 0$ . Además,

$$|R(t)| = \beta |v(t)| \Rightarrow \beta = \frac{|R(t)|}{|v(t)|} = \frac{160}{40} = 4.$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton,  $F = ma$ , se tiene:

$$\begin{aligned} mv'(t) &= mg - \beta v(t) \Rightarrow mv'(t) + \beta v(t) = mg \Rightarrow \\ &\Rightarrow v' + \frac{\beta}{m}v(t) = g \Rightarrow v'(t) + \frac{4}{0.2}v(t) = 980 \Rightarrow v'(t) + 20v(t) = 980. \end{aligned}$$

- La velocidad  $v(t)$  está dada por la solución del PVI:

$$v'(t) + 20v(t) = 980, \text{ con } v(0) = 0.$$

Resolvemos la ED lineal con factor integrante  $e^{20t}$ . Por lo tanto,

$$\begin{aligned} v'(t) + 20v(t) = 980 &\Rightarrow e^{20t}[v'(t) + 20v(t)] = 980e^{20t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{d}{dt}[e^{20t}v(t)] = 980e^{20t} \Rightarrow e^{20t}v(t) = \int 980e^{20t} dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{20t}v(t) = 980 \frac{1}{20}e^{20t} + C_1 = 49e^{20t} + C_1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow v(t) = (4.9e^{20t} + C_1)e^{-20t} \Rightarrow v(t) = 49 + C_1e^{-20t}. \end{aligned}$$

Ahora,  $v(0) = 0 \Rightarrow 49 + C_1e^0 = 0 \Rightarrow C_1 = -49$ .

Luego, la velocidad instantánea al cabo de  $t$  segundos es:  $v(t) = 49(1 - e^{-20t}) \text{ cm/s}$ .

- La posición instantánea de la gota está dada por

$$\begin{aligned} x(t) &= \int x'(t) dt = \int v(t) dt = \int 49(1 - e^{-20t}) dt \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t) = 49\left[t - \left(-\frac{1}{20}\right)e^{-20t}\right] + C_2 = 49t + \frac{49}{20}e^{-20t} + C_2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t) = 49t + 2.45e^{-20t} + C_2. \end{aligned}$$

Considerando que  $x(t)$  está medido con respecto al punto de partida de la gota, se tiene  $x(0) = 0$ .

$$\text{Ahora, } x(0) = 0 \Rightarrow (49)(0) + 2.45e^0 + C_2 \Rightarrow C_2 = -2.45.$$

Por lo tanto la posición de la gota de aceite al cabo de  $t$  segundos es, en centímetros,

$$x(t) = 49t + 2.45(e^{-20t} - 1).$$

c. La velocidad límite de la gota de aceite es

$$\begin{aligned} v_{\text{lím}} &= \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [49(1 - e^{-20t})] = 49 \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{e^{20t}}\right) = \\ &= (49)(1 - 0) = 49 \text{ cm/s.} \end{aligned}$$

□