CAPÍTULO

3

Aplicaciones de primer orden

3.7 Problemas geométricos

En esta sección, trataremos problemas geométricos que se pueden plantear y resolver mediante ecuaciones diferenciales que se obtienen considerando la interpretación geométrica de la derivada que, como sabemos, es la pendiente de la recta tangente a la curva (gráfica de la función) en un punto.

3.7.1 Curvas definidas por sus tangentes y normales

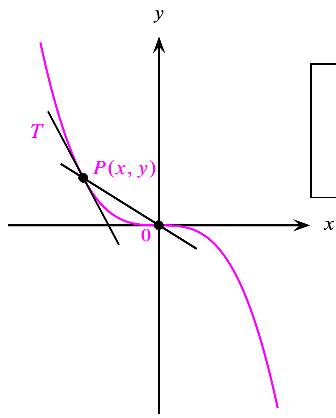
Es conveniente recordar que:

1. Si una curva está definida mediante una función $y = f(x)$ y $P(x, y)$, es un punto arbitrario de ella; entonces la derivada $\dfrac{dy}{dx} = f'(x)$ nos da la pendiente m_T de la recta tangente T a la curva en el punto arbitrario $P(x, y)$. Es decir, $\dfrac{dy}{dx} = f'(x) = m_T$.
2. Si una curva está definida mediante una ecuación $g(x, y) = 0$, donde se tiene implícitamente definida $y = f(x)$ y $P(x, y)$, es un punto arbitrario de la curva; entonces la derivada (calculada mediante derivación implícita) $\dfrac{dy}{dx} = \phi(x, y)$ nos da la pendiente m_T de la recta tangente T a dicha curva en el punto arbitrario $P(x, y)$. Es decir, $\dfrac{dy}{dx} = \phi(x, y) = m_T$.
3. Si la pendiente de la recta tangente T a una curva en un punto arbitrario $P(x, y)$ es $m_T \neq 0$ y N es la recta normal a la misma curva en el mismo punto P, entonces la pendiente de N es $m_N = -\dfrac{1}{m_T}$.

También debemos considerar que:
Si C_1 y C_2 son dos curvas que se intersecan en el punto P, con rectas tangentes T_1 y T_2, respectivamente, (en dicho punto) y θ es el ángulo formado por T_1 y T_2, entonces decimos que las curvas C_1 y C_2 se intersecan en P formando un ángulo θ entre ellas.

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

Ejemplo 3.7.1 *Determinar una curva para la cual la pendiente de la recta tangente en cada punto es r veces la pendiente de la recta que une este punto con el origen de coordenadas.*



$$m_{OP} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x};$$

$$m_T = \frac{dy}{dx}.$$

▼ Sea $P(x, y)$ un punto arbitrario de la curva $y = f(x)$ y sea T la recta tangente a ella en P.
La pendiente de la recta tangente T es $m_T = \dfrac{dy}{dx}$.
Si m es la pendiente del segmento de recta OP, entonces $m = \dfrac{y}{x}$.
Como la pendiente m_T es r veces la pendiente m, entonces

$$m_T = rm \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = r\left(\frac{y}{x}\right),$$

que es una ecuación diferencial que resolvemos separando variables

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = r\left(\frac{y}{x}\right) \;&\Rightarrow\; \frac{dy}{y} = r\left(\frac{dx}{x}\right) \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = r\int \frac{dx}{x} \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow\; \ln y = r\ln x + C \;\Rightarrow\; \ln y = \ln x^r + C \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow\; e^{\ln y} = e^{\ln x^r + C} \;\Rightarrow\; y = e^{\ln x^r} e^C = x^r C \;\Rightarrow\\ &\Rightarrow\; y = Cx^r\,. \end{aligned}$$

Luego, cualquiera de las curvas $y = Cx^r$ cumple con la propiedad pedida.
Por ejemplo, con $C = -3$ y con $n = 5$ se tiene la curva $y = -3x^5$, cuya derivada es

$$\frac{dy}{dx} = -3(5x^4) = 5\left(\frac{-3x^5}{x}\right) = 5\left(\frac{y}{x}\right),$$

cumpliendo la condición $\dfrac{dy}{dx} = n\left(\dfrac{y}{x}\right)$ para $n = 5$.

□

Ejemplo 3.7.2 *Una curva es tal que la pendiente de la recta tangente en cada punto es proporcional a la abscisa del punto de tangencia. Determine la forma general de tal curva.*

▼ Sea $y = f(x)$ la ecuación de la curva y sea $P(x, y)$ un punto arbitrario de ella.
La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P está dada por la derivada y'.
Debido a que la pendiente (y') de la tangente es proporcional a la abscisa (x) del punto de tangencia P, entonces $y' = C_1 x$, donde C_1 es la constante de proporcionalidad. Tenemos que

$$y' = C_1 x \;\Rightarrow\; y = \int C_1 x\, dx = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2 = C_3 x^2 + C_2.$$

Por lo tanto, las curvas que cumplen con la propiedad establecida son todas las parábolas verticales de la forma: $y = Cx^2 + K$, donde C y K son constantes.
Por ejemplo, para $C = 4$ y $K = -3$ se tiene la parábola $y = 4x^2 - 3$, cuya derivada es $y' = 8x$ donde y' es proporcional a x, con constante de proporcionalidad $C_1 = 8$.

□

Ejemplo 3.7.3 *Halle una curva que pase por el punto $(1, 1)$ de tal manera que la pendiente de la tangente en cada punto sea proporcional al cuadrado de la ordenada de este punto.*

▼ Sea $y = f(x)$ la ecuación de la curva y $P(x, y)$ un punto arbitrario de ella.
La pendiente de la recta tangente a la curva en el punto P está dada por y'.
Debido a que la pendiente (y') de la tangente es proporcional al cuadrado de la ordenada (y^2), entonces $y' = C_1 y^2$, donde C_1 es la constante de proporcionalidad. Tenemos que

$$y' = C_1 y^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y^2 \Rightarrow \frac{dy}{y^2} = C_1 dx \Rightarrow \int y^{-2}\, dy = \int C_1\, dx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{y^{-1}}{-1} = C_1 x + C_2 \Rightarrow -\frac{1}{y} = C_1 x + C_2 \Rightarrow \frac{1}{y} = -(C_1 x + C_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y = \frac{-1}{C_1 x + C_2}.$$

Por pasar la curva por el punto $(1, 1)$ ocurre que

$$x = 1 \;\&\; y = 1 \Rightarrow 1 = \frac{-1}{C_1(1) + C_2} \Rightarrow C_1 + C_2 = -1 \Rightarrow C_2 = -1 - C_1.$$

Por lo cual,

$$y = \frac{-1}{C_1 x + C_2} = \frac{-1}{C_1 x + (-1 - C_1)} = \frac{-1}{C_1(x - 1) - 1}.$$

Por lo tanto, el requisito pedido lo cumple la familia de curvas $y = \dfrac{1}{1 - C(x - 1)}$, donde C es una constante arbitraria. Por ejemplo, para $C = 2$ se tiene la curva

$$y = \frac{1}{-2x + 3}, \quad \text{la cual tiene por derivada}$$
$$y' = \frac{2}{(-2x + 3)^2}, \quad \text{que puede ser expresada como}$$
$$y' = (2)\frac{1}{(-2x + 3)^2} = (2)\left(\frac{1}{-2x + 3}\right)^2 = (2)y^2,$$

donde se ve que la derivada y' es proporcional a y^2.

□

Ejercicios 3.7.1 *Tangentes y normales.* *Soluciones en la página 4*

1. Halle una curva que pase por el punto $(0, -2)$ de tal modo que la pendiente de la recta tangente en cada punto sea igual a la ordenada de dicho punto aumentada en 3 unidades.

2. Determine una curva que pase por el punto $(2, 1)$ de tal manera que la recta tangente en cualquier punto tenga la misma dirección que la recta que une al origen de coordenadas con dicho punto.

3. Describa el tipo de curva que tiene la propiedad de que todas sus rectas normales pasan por un punto fijo de coordenadas (x_0, y_0).

4. Encuentre la curva que satisface que el área de la región bajo la curva y sobre el eje x, desde el punto $(0, 1)$ hasta el punto (x, y), ambos en la curva, sea igual a la ordenada del punto (x, y).

5. Halle la familia de curvas que tienen la propiedad de que el segmento de la tangente a la curva comprendido entre los ejes coordenados se divide a la mitad en el punto de contacto.

Ejercicios 3.7.1 *Tangentes y normales.* *Página 3*

1. $y = e^x - 3.$
2. $y = \frac{1}{2}x.$
3. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = C.$
4. $y = e^x.$
5. $xy = C.$