CAPÍTULO

3

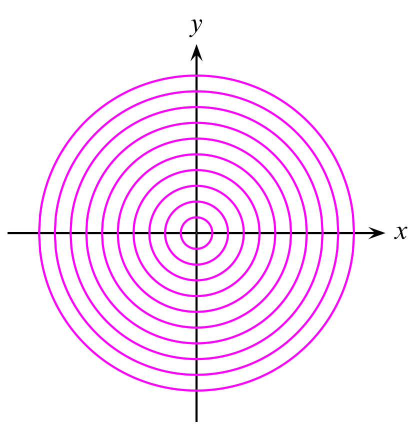
Aplicaciones de primer orden

3.7.1 Trayectorias ortogonales

Si consideramos la familia de curvas

$$x^2 + y^2 = c, \quad \text{con } c > 0,$$

podemos decir que esta familia es el conjunto de las circunferencias de radio $r = \sqrt{c}$ con centro en el origen.



Ésta es una familia de curvas de la forma:

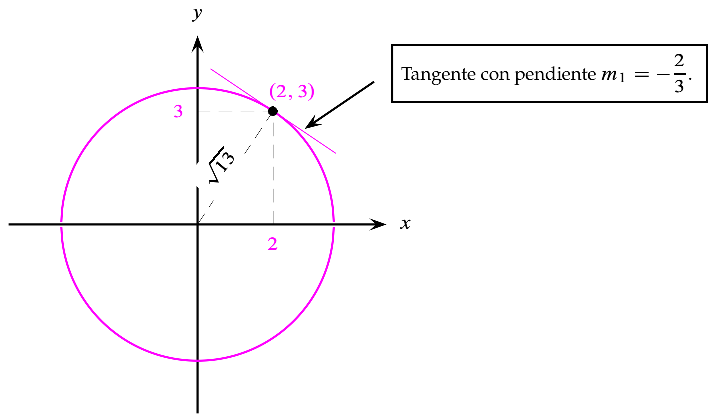
$$F(x, y) = c; \text{ donde } F(x, y) = x^2 + y^2.$$

Una ecuación diferencial asociada a esta familia de curvas es:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}.$$

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

En un punto arbitrario del plano (x, y), la curva de la familia que pasa por ese punto tiene recta tangente con pendiente $-\dfrac{x}{y}$. Por ejemplo, por el punto $(2, 3)$ pasa la circunferencia de radio $\sqrt{13}$ y su recta tangente en dicho punto tiene pendiente $m_1 = -\dfrac{2}{3}$.



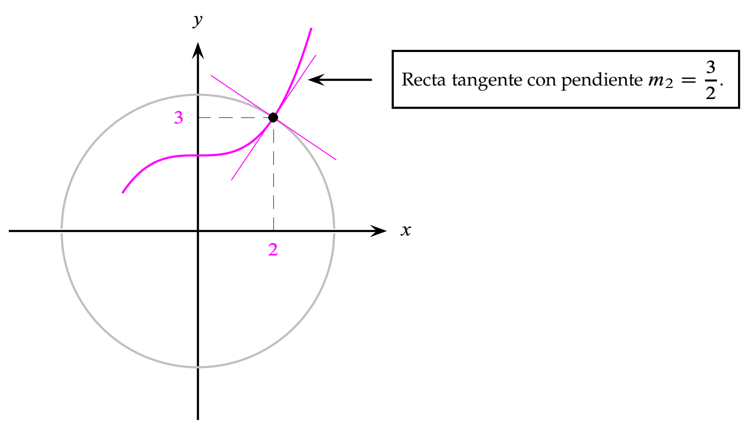
Ahora bien, se sabe que dos rectas que se intersecan son ortogonales (o perpendiculares) si sus pendientes satisfacen:

$$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \text{o bien} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2} \quad \text{o bien} \quad m_2 = -\frac{1}{m_1}.$$

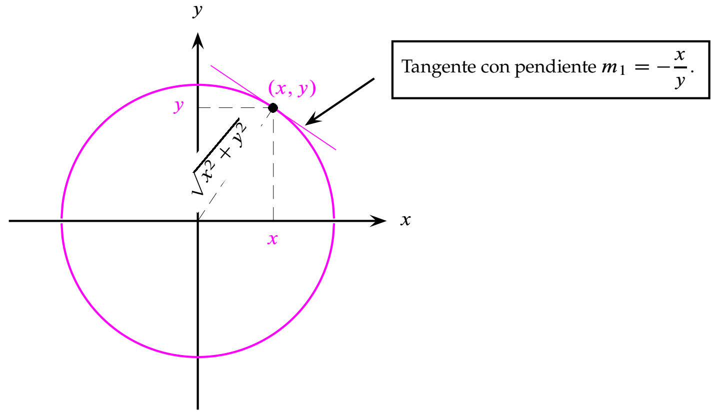
Es decir, la pendiente de una recta es el negativo del inverso multiplicativo de la pendiente de la otra.

Existen curvas que pasan por el punto $(2, 3)$ y que tienen como pendiente de la tangente $m_2 = \dfrac{3}{2}$.

Por ejemplo, $y = \dfrac{1}{8}x^3 + 2$ pasa por el punto $(2, 3)$ y la pendiente de su tangente en ese punto es $m_2 = \dfrac{3}{2}$:



Decimos entonces que, en el punto $(2, 3)$, las curvas $x^2 + y^2 = 13$ & $y = \dfrac{1}{8}x^3 + 2$ son ortogonales puesto que sus tangentes son ortogonales. Cumplen que $m_1 \cdot m_2 = -1$. Ahora, si tomamos un punto arbitrario del plano (x, y) por donde pasa una circunferencia de radio $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ cuya tangente tiene pendiente $m_1 = -\dfrac{x}{y}$



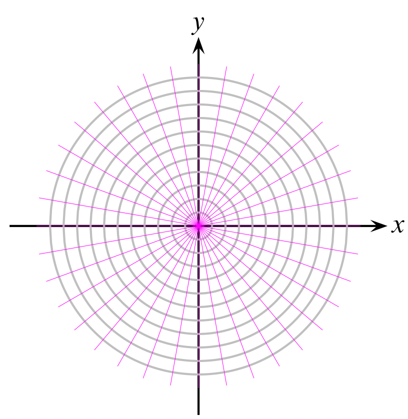
podemos generar entonces una ecuación diferencial con la igualdad $m_2 = -\dfrac{1}{m_1}$. Esta ED es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}. \tag{3.1}$$

La anterior ED tiene soluciones tales que, cuando una curva solución pasa por el punto (x, y), su recta tangente es ortogonal a la tangente de la circunferencia que pasa por ese punto.
Vamos a resolver la ecuación diferencial anterior (3.1) por separación de variables:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} &\Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln y = \ln x + C \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln C \Rightarrow \ln y = \ln Cx \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = Cx.\end{aligned}$$

La solución general de esta ecuación diferencial representa a la familia de rectas que pasa por el origen. Como vemos, cada recta de la familia $y = Cx$ interseca ortogonalmente a cada una de las circunferencias de la familia $x^2 + y^2 = c$. Así, con el método indicado, hallamos una familia de curvas (y no una única curva) tal que cada uno de sus miembros es ortogonal a cada una de las curvas del la familia $x^2 + y^2 = c$. Esto se ve en la siguiente figura:



□

- Supongamos que tenemos dos familias de curvas (las cuales llamaremos $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$), cuando cada curva de una familia $\mathcal{C}_1$ es ortogonal a cada una de las curvas de otra familia $\mathcal{C}_2$, se dice que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son familias ortogonales de curvas o bien que $\mathcal{C}_1$ y $\mathcal{C}_2$ son familias de trayectorias ortogonales.

¿Cómo encontrar la familia ortogonal a una familia dada?

Si tenemos una familia de curvas de la forma

$$F(x, y) = c.$$

Se calcula la ecuación diferencial asociada a dicha familia, es decir:

$$y' = -\frac{F_x}{F_y}.$$

Se afirma entonces que la ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal es

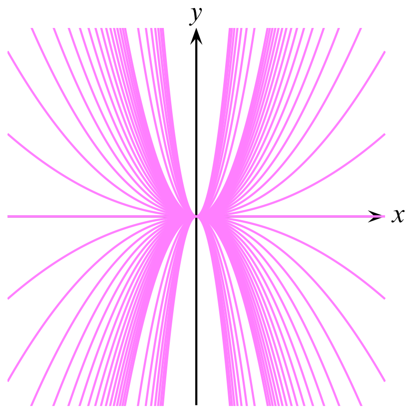
$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x}.$$

Resolvemos esta ecuación diferencial y su solución general es la familia ortogonal a la familia dada.

Ejemplo 3.7.1 *Obtener la familia ortogonal a la familia:*

$$y = cx^2.$$

▼ Esta familia es el conjunto de las parábolas con vértice en el origen.



$\longleftarrow$ Para $c > 0$.

$\longleftarrow$ Para $c < 0$.

Calculamos la ecuación diferencial asociada a esta familia de curvas. Escribimos $y = cx^2$ como

$$\frac{y}{x^2} = c \text{ donde } F(x, y) = \frac{y}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} F_x = y\left(-\dfrac{2x}{x^4}\right) = -\dfrac{2y}{x^3}. \\ F_y = \dfrac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Entonces la ecuación diferencial asociada a la familia de parábolas es

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{-\dfrac{2y}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2}} = \frac{2y}{x}.$$

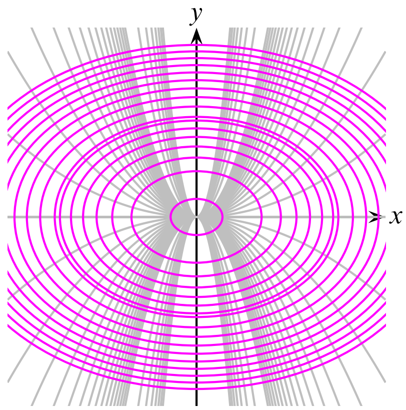
Por lo tanto la ecuación diferencial asociada a la familia ortogonal es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} = -\frac{x}{2y}.$$

Resolvemos esta ED por variables separables:

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2y} \Rightarrow 2y\,dy = -x\,dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int 2y\,dy = -\int x\,dx \Rightarrow y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C \Rightarrow \frac{x^2}{2C} + \frac{y^2}{C} = 1; \end{aligned}$$

esta última ecuación es la familia ortogonal y representa una familia de elipses con centro en el origen:



□

Ejemplo 3.7.2 *Determinar las trayectorias ortogonales de la familia de curvas*

$$2x^2 + y^2 = 4cx, \quad \textit{con } c \textit{ constante.}$$

▼ Obtenemos la ED asociada a esta familia:

$$2x^2 + y^2 = 4cx \ \Rightarrow\ \frac{2x^2 + y^2}{4x} = c \ \Rightarrow\ F(x, y) = \frac{x}{2} + \frac{y^2}{4x} \ \Rightarrow\ \begin{cases} F_x = \dfrac{1}{2} - \dfrac{y^2}{4x^2} = \dfrac{2x^2 - y^2}{4x^2}, \\ F_y = \dfrac{y}{2x}. \end{cases}$$

Luego, la ED asociada es

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\dfrac{2x^2 - y^2}{4x^2}}{\dfrac{y}{2x}} = -\frac{2x^2 - y^2}{2xy}.$$

Por lo tanto, la ED asociada a las trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_y}{F_x} = \frac{2xy}{2x^2 - y^2}.$$

Como se observa, esta ED es homogénea y la resolvemos como tal

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{2x^2 - y^2} = \frac{\cancel{x^2}\left(\dfrac{2y}{x}\right)}{\cancel{x^2}\left(2 - \dfrac{y^2}{x^2}\right)} = \frac{2\left(\dfrac{y}{x}\right)}{2 - \left(\dfrac{y}{x}\right)^2}.$$

Tenemos:

$$w = \frac{y}{x} \ \Rightarrow\ y = xw \ \Rightarrow\ \frac{dy}{dx} = x\frac{dw}{dx} + w.$$

Al sustituir en la ED:

$$\begin{aligned} x\frac{dw}{dx} + w = \frac{2w}{2 - w^2} &\Rightarrow x\frac{dw}{dx} = \frac{2w}{2 - w^2} - w = \frac{\cancel{2w} - \cancel{2w} + w^3}{2 - w^2} = \frac{w^3}{2 - w^2} \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{2 - w^2}{w^3}\, dw = \frac{dx}{x} \ \Rightarrow\ \int \frac{dx}{x} = \int \frac{2 - w^2}{w^3}\, dw = \int \left(2w^{-3} - \frac{1}{w}\right) dw \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln x = 2\left(\frac{w^{-2}}{-2}\right) - \ln w + C = -\frac{1}{w^2} - \ln w + C \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln x + \frac{1}{w^2} + \ln w = C. \end{aligned}$$

Y debido a que $w = \dfrac{y}{x}$, se tiene que

$$\ln x + \frac{x^2}{y^2} + \ln\left(\frac{y}{x}\right) = C \;\Rightarrow \cancel{\ln x} + \frac{x^2}{y^2} + \ln y - \cancel{\ln x} = C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{y^2} + \ln y = C \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 \ln y = Cy^2.$$

Por lo tanto, las trayectorias ortogonales están dadas por la familia de curvas:

$$x^2 + y^2 \ln y = Cy^2;$$

donde C es constante.

□

Ejemplo 3.7.3 *Calcular las trayectorias ortogonales de la familia de curvas*

$$\cos y = ce^{-x}, \qquad \textit{con } c \textit{ constante.}$$

▼ Obtenemos la ED asociada a esta familia de curvas:

$$\cos y = ce^{-x} \;\Rightarrow\; e^x \cos y = c \;\Rightarrow\; F(x, y) = e^x \cos y \;\Rightarrow \begin{cases} F_x = (\cos y)e^x = e^x \cos y, \\ F_y = e^x(-\operatorname{sen} y) = -e^x \operatorname{sen} y. \end{cases}$$

Luego, la ED asociada es

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\cancel{e^x}\cos y}{-\cancel{e^x}\operatorname{sen} y} = \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}.$$

Por lo que, la ED asociada a las trayectorias ortogonales es

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y},$$

que resolvemos por variables separables.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\operatorname{sen} y}{\cos y} \;\Rightarrow\; \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = -dx \;\Rightarrow\; \int \frac{\cos y}{\operatorname{sen} y}\,dy = -\int dx \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ln(\operatorname{sen} y) = -x + C \;\Rightarrow\; \operatorname{sen} y = e^{-x+C} = e^{-x}e^{C} = e^{-x}C.$$

Por lo tanto, las trayectorias ortogonales están dadas por

$$\operatorname{sen} y = Ce^{-x}, \qquad \text{con } C \text{ constante.}$$

□

Ejercicios 3.7.2 *Trayectorias ortogonales.* *Soluciones en la página 7*
Encontrar la familia de curvas ortogonales a cada una de las siguientes familias.

1. $y^2 = 2Cx$.
2. $y = Ce^x$.
3. $y^2 - 2x^2 = C$.
4. $Cx^2 + y^2 = 1$.
5. $y = Cx^2$.
6. $x^2 + y^2 = 2ay$.
7. $y^2 = 2p(x - a)$; $p \neq 0$ es un número conocido.
8. $x^2 - y^2 = a$.
9. $y^2 = \dfrac{x^3}{2a - x}$.
10. $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$.

Ejercicios 3.7.2 *Trayectorias ortogonales.* *Página 6*

1. $2x^2 + y^2 = C$.
2. $y^2 + 2x = C$.
3. $xy^2 = C$.
4. $x^2 + y^2 - \ln y^2 = C$.
5. $x^2 + 2y^2 = C$.
6. $x^2 + y^2 = Cx$.
7. $y = Ce^{-\frac{x}{p}}$.
8. $y = \dfrac{C}{x}$.
9. $(x^2 + y^2)^2 = K(2x^2 + y^2)$.
10. $(x^2 + y^2)^2 = K\,xy$.