CAPÍTULO

3

Aplicaciones de primer orden

3.6 Mecánica

El paracaidismo es uno de los deportes extremos que día a día cuenta con mayor número de adeptos. Los que practican este deporte se tiran desde un avión en movimiento y caen al inicio en caída libre, luego extienden su cuerpo perpendicularmente a la trayectoria de caída y finalmente abren su paracaídas para aterrizar suavemente.
Es notorio el cambio de la velocidad de caída del paracaidista de una etapa a la siguiente. Nuestra experiencia nos dice que el cambio observado se debe precisamente a la interacción del aire (del medio) con la persona y luego con el paracaídas. Interacción que se traduce en una resistencia del aire al movimiento del paracaidista.

Observamos dos tipos de movimiento:

1. Una caída libre, que es el tipo de movimiento donde la resistencia del aire o del medio es despreciable, por lo que se considera nula.

2. Una caída no libre o con fricción, que es el tipo de movimiento donde la resistencia del aire o del medio no es despreciable. En este caso el medio se opone al movimiento del paracaidista.

Experimentalmente se sabe que todo fluido (por ejemplo: aire, agua y aceite) se opone al movimiento de todo cuerpo u objeto que pasa a través de él. Dicha oposición al movimiento se manifiesta mediante una fuerza de resistencia que tiene dirección contraria al movimiento del cuerpo y con una magnitud que, para velocidades pequeñas, es directamente proporcional a la magnitud de la velocidad instantánea (rapidez) del cuerpo.
Para modelar el movimiento de un cuerpo a través de un fluido, es necesario tener presente la segunda ley de Newton, la cual establece una proporcionalidad directa entre la fuerza resultante F que actúa sobre el cuerpo y la aceleración instantánea a de éste. Esto es, $F = ma$, donde la masa m del cuerpo juega el papel de la constante de proporcionalidad.

1. canek.azc.uam.mx: 22/ 9/ 2010

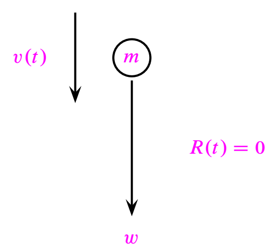
Tengamos presente también que:

$$
\begin{aligned}
a(t) &= \frac{d}{dt}v(t), && \text{donde } v(t) \text{ es la velocidad instantánea;}\\
v(t) &= \frac{d}{dt}x(t), && \text{donde } x(t) \text{ es la posición instantánea;}\\
w &= mg && \text{es el peso del cuerpo de masa } m.
\end{aligned}
$$

Si $R(t)$ es la fuerza de resistencia del fluido al movimiento de m, entonces su magnitud $|R(t)|$ es directamente proporcional a la rapidez $|v(t)|$ de m. Esto es, $|R(t)| = \beta |v(t)|$, donde $\beta > 0$ es la constante de proporcionalidad y además $R(t) = -\beta v(t)$ por ser $R(t)$, $v(t)$ de sentidos opuestos.

Tomando en cuenta lo anterior se presentan dos tipos de movimientos:

1. Caída libre. Usamos la siguiente figura:



Se considera hacia abajo la dirección positiva. Y sabemos que la única fuerza que actúa sobre la masa m es su peso $w = mg$.

$$
\begin{aligned}
&F = ma(t) \;\&\; F = w \;\Rightarrow ma(t) = w \;\Rightarrow\; ma(t) = mg \;\Rightarrow\\
&\qquad \Rightarrow a(t) = g \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}v(t) = g \;\Rightarrow\; v(t) = gt + C.
\end{aligned}
$$

Suponiendo que la velocidad inicial es v_0,

$$v(0) = v_0 \;\Rightarrow\; g(0) + C = v_0 \;\Rightarrow\; C = v_0.$$

Entonces, la velocidad instantánea es

$$v(t) = gt + v_0.$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
&v(t) = \frac{d}{dt}x(t) = gt + v_0 \;\Rightarrow x(t) = \int (gt + v_0)\,dt \;\Rightarrow\\
&\qquad \Rightarrow x(t) = g\left(\frac{t^2}{2}\right) + v_0 t + C.
\end{aligned}
$$

Suponiendo que la posición inicial es x_0,

$$x(0) = x_0 \;\Rightarrow\; \frac{1}{2}g(0)^2 + v_0(0) + C = x_0 \;\Rightarrow\; C = x_0.$$

Luego, la posición instantánea es

$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + x_0.$$

Resumiendo: en una caída libre la aceleración es constante y el objeto obedece las ecuaciones para movimiento uniformemente acelerado, es decir:

$$a(t) = g.$$

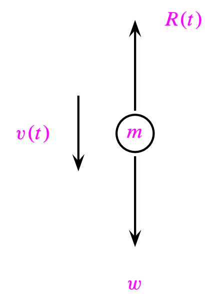
La velocidad instantánea es

$$v(t) = v_0 + gt.$$

La posición instantánea es

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2.$$

2. Caída no libre (con resistencia). Usamos la siguiente figura:



Considerando hacia abajo la dirección positiva:

$$F = ma(t) \quad \& \quad F = w + R(t) \Rightarrow ma(t) = w + R(t) \Rightarrow ma(t) = mg - \beta v(t) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m\frac{d}{dt}v(t) = mg - \beta v(t) \Rightarrow mv'(t) + \beta v(t) = mg \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v'(t) + \frac{\beta}{m}v(t) = g.$$

Suponiendo que la velocidad inicial es v_0, encontramos la velocidad instantánea $v(t)$ por la solución del problema de valores iniciales (PVI):

$$v'(t) + \frac{\beta}{m}v(t) = g, \quad \text{con} \quad v(0) = v_0.$$

Resolvemos este problema. La ED es lineal no homogénea para $v(t)$ y tiene por factor integrante a la exponencial $e^{\frac{\beta}{m}t}$. Luego,

$$e^{\frac{\beta}{m}t}\left[v'(t) + \frac{\beta}{m}v(t)\right] = ge^{\frac{\beta}{m}t} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{\beta}{m}t}v(t)\right] = ge^{\frac{\beta}{m}t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e^{\frac{\beta}{m}t}v(t) = g\int e^{\frac{\beta}{m}t}\,dt = g\left(\frac{m}{\beta}\right)e^{\frac{\beta}{m}t} + C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(t) = \left(\frac{mg}{\beta}e^{\frac{\beta}{m}t} + C\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} = \frac{mg}{\beta} + C_1 e^{-\frac{\beta}{m}t} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow v(t) = \frac{mg}{\beta} + Ce^{-\frac{\beta}{m}t}.$$

Ahora bien,

$$v(0) = v_0 \Rightarrow \frac{mg}{\beta} + Ce^0 = v_0 \Rightarrow C = v_0 - \frac{mg}{\beta}.$$

Por lo tanto,

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} = \frac{w}{\beta} + \left(v_0 - \frac{w}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta g}{w}t},$$

que es la velocidad instantánea del cuerpo de masa m en el tiempo $t \geq 0$.

Note lo siguiente:

$$\beta > 0,\ m > 0,\ t > 0\ \Rightarrow \frac{\beta}{m}t > 0\ \Rightarrow\ \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{\beta}{m}t\right) = +\infty\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ \lim_{t\to+\infty} e^{\frac{\beta}{m}t} = +\infty\ \Rightarrow\ \lim_{t\to+\infty} e^{-\frac{\beta}{m}t} = \lim_{t\to+\infty}\frac{1}{e^{\frac{\beta}{m}t}} = 0.$$

De lo anterior:

$$\lim_{t\to+\infty} v(t) = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t}\right] = \frac{mg}{\beta}.$$

Denominamos velocidad límite a este resultado, que es una velocidad constante:

$$v_{\text{lím}} = \frac{mg}{\beta} = \frac{w}{\beta};$$

esto describe el comportamiento de la velocidad $v(t)$ a medida que el tiempo t crece.
Observe que la velocidad límite se alcanza cuando el peso del paracaidista es igual a la fuerza de resistencia del aire, es decir, cuando las fuerzas que actúan sobre el paracaidista están en equilibrio.
Esta velocidad límite constante es la que permite al paracaidista un aterrizaje suave.
Veamos ahora la posición instantánea $x(t)$ del cuerpo de masa m en el tiempo $t \geq 0$.
Ya que $v(t) = \dfrac{d}{dt}x(t)$, entonces:

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int\left[\frac{mg}{\beta} + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t}\right]dt = \frac{mg}{\beta}t + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)\int e^{-\frac{\beta}{m}t}\,dt =$$
$$= \frac{mg}{\beta}t + \left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)\left(-\frac{m}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} + C\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x(t) = \frac{mg}{\beta}t - \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} + C.$$

Y si x_0 es la posición inicial del cuerpo, entonces:

$$x(0) = x_0\ \Rightarrow\ \frac{mg}{\beta}(0) - \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^0 + C = x_0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ -\frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right) + C = x_0\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ C = x_0 + \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right).$$

Por lo tanto, la posición instantánea es

$$x(t) = \frac{mg}{\beta}t - \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)e^{-\frac{\beta}{m}t} + x_0 + \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)\ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow\ x(t) = x_0 + \frac{mg}{\beta}t + \frac{m}{\beta}\left(v_0 - \frac{mg}{\beta}\right)\left[1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right].$$

Dos fórmulas muy particulares se tienen cuando $v_0 = 0$ y cuando $x_0 = 0$. En este caso:

$$v(t) = \frac{mg}{\beta} - \frac{mg}{\beta}e^{-\frac{\beta}{m}t} = \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right);$$
$$x(t) = \frac{mg}{\beta}t + \frac{m}{\beta}\left(-\frac{mg}{\beta}\right)\left[1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right] = \frac{mg}{\beta}\left[t - \frac{m}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{\beta}{m}t}\right)\right].$$

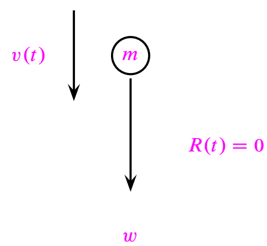
Ahora, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 3.6.1 *Una masa de 2 kg cae desde el reposo bajo la influencia de la gravedad y con resistencia despreciable del aire.*

1. *Modelar el movimiento mediante una ecuación diferencial.*
2. *Determinar la velocidad de la masa en cualquier instante $t \geq 0$.*
3. *Calcular la velocidad después de 5 s.*
4. *Determinar el tiempo que transcurre para que la velocidad sea de 100 m/s.*
5. *Determinar la distancia recorrida por la masa durante los primeros t segundos.*
6. *Calcular la distancia recorrida por la masa entre los segundos 4 y 5, así como entre los segundos 5 y 6.*

▼

1. Usaremos la siguiente figura:



Considerando hacia abajo la dirección positiva.
Si $a(t)$ es la aceleración instantánea:

$$ma(t) = w \;\Rightarrow\; \cancel{m}\frac{d}{dt}v(t) = \cancel{m}g \;\Rightarrow\; v'(t) = g.$$

Al caer desde el reposo, ocurre que $v(0) = 0$.
Hallamos la velocidad instantánea $v(t)$ de la masa por la solución del problema de valor inicial (PVI):

$$v'(t) = g, \quad \text{con} \quad v(0) = 0.$$

2. Resolvemos este PVI:

$$v'(t) = g \;\Rightarrow\; v(t) = gt + C.$$
$$v(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = g(0) + C \;\Rightarrow\; C = 0.$$

Entonces: $v(t) = gt = 9.8t$ m/s, que es la velocidad de la masa en cualquier instante $t \geq 0$.

3. Después de 5 s la velocidad es $v(5) = 9.8(5)$ m/s $= 49$ m/s.

4. La velocidad $v(t)$ es de 100 m/s cuando $v(t) = 100 \;\Rightarrow\; 9.8t = 100 \;\Rightarrow\; t = \frac{100}{9.8}\text{s} = 10.2$ s.

5. Si $x(t)$ es la posición de la masa m con respecto a su punto de partida, entonces:

$$v(t) = 9.8t \;\Rightarrow\; \frac{d}{dt}x(t) = 9.8t \;\Rightarrow\; x(t) = 9.8\left(\frac{t^2}{2}\right) + C \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; x(t) = 4.9t^2 + C.$$

Considerando que la posición inicial con respecto a su punto de partida es $x(0) = 0$, se tiene que:

$$x(0) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = 4.9(0)^2 + C \;\Rightarrow\; C = 0.$$

Entonces, la posición de m después de t segundos es $x(t) = 4.9t^2$ m, que es precisamente la distancia recorrida por m durante ese tiempo.

6. La posición de m después de $t = 4$ s es

$$x(4) = 4.9(4)^2 \text{ m } = 78.4 \text{ m} .$$

La posición de m en $t = 5$ s es

$$x(5) = 4.9(5)^2 \text{ m } = 122.5 \text{ m} .$$

La posición de m en $t = 6$ s es

$$x(6) = 4.9(6)^2 \text{ m } = 176.4 \text{ m} .$$

La distancia recorrida entre los segundos 4 y 5 es

$$x(5) - x(4) = (122.5 - 78.4) \text{ m } = 44.1 \text{ m} .$$

La distancia recorrida entre los segundos 5 y 6 es

$$x(6) - x(5) = (176.4 - 122.5) \text{ m } = 53.9 \text{ m} .$$

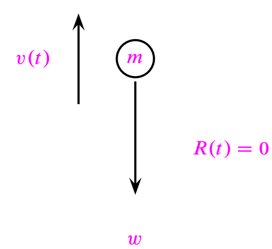
□

Ejemplo 3.6.2 *Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad de* 20 *m/s y el aire no se opone al movimiento.*

1. *Modelar el movimiento mediante una ecuación diferencial.*
2. *Determinar la velocidad de la pelota.*
3. *Determinar el tiempo de subida de la pelota y la máxima altura que alcanza.*
4. *Calcular la velocidad de la pelota después de* 2 *y* 3 *s.*
5. *Calcular el tiempo que tarda la pelota en regresar a su posición inicial.*

▼

1. Usaremos la figura siguiente:



Considerando hacia arriba la dirección positiva:
Si $a(t)$ es la aceleración instantánea, entonces

$$ma(t) = -w \;\Rightarrow\; \cancel{m}\frac{d}{dt}v(t) = -\cancel{m}g \;\Rightarrow\; v'(t) = -g.$$

Luego, la velocidad instantánea $v(t)$ está dada por la solución del PVI:

$$v'(t) = -g, \quad \text{con} \quad v(0) = 20.$$

2. Se tiene que

$$v'(t) = -g \;\Rightarrow\; v(t) = -gt + C \;\Rightarrow\; v(t) = -9.8t + C.$$

Aplicamos la condición inicial:

$$v(0) = 20 \;\Rightarrow\; -9.8(0) + C = 20 \;\Rightarrow\; C = 20.$$

Luego, la velocidad de la pelota en cualquier tiempo es

$$v(t) = -9.8t + 20 \text{ m/s}.$$

3. La pelota sube mientras su velocidad es positiva y se detiene en el instante t_1 en que

$$v(t_1) = 0 \Rightarrow -9.8t_1 + 20 = 0 \Rightarrow t_1 = \frac{20}{9.8} = 2.0408 \text{ s.}$$

Luego, durante 2.0408 s la pelota sube.

Para calcular la altura máxima alcanzada por la pelota, determinamos primero la posición $x(t)$.

$$\begin{aligned} v(t) = -9.8t + 20 &\Rightarrow x'(t) = -9.8t + 20 \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t) = \int (-9.8t + 20)\, dt = -9.8\frac{t^2}{2} + 20t + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow x(t) = -4.9t^2 + 20t + C. \end{aligned}$$

Considerando la condición inicial, se tiene que

$$x(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x(t) = -4.9t^2 + 20t.$$

La altura máxima que alcanza la pelota es

$$\begin{aligned} &x_{max} = x(t_1) = -4.9t_1^2 + 20t_1 = -4.9(2.0408)^2 + 20(2.0408) \Rightarrow \\ \Rightarrow\ &x_{max} = 20.4082 \text{ m.} \end{aligned}$$

4. La velocidad de la pelota después de 2 s es

$$v(2) = -9.8(2) + 20 = 0.4 \Rightarrow v(2) = 0.4 \text{ m/s};$$

donde el signo positivo significa que la pelota se dirige hacia arriba.

La velocidad de la pelota después de 3 s es

$$v(3) = -9.8(3) + 20 = -9.4 \Rightarrow v(3) = -9.4 \text{ m/s};$$

donde el signo negativo significa que la pelota se dirige hacia abajo.

5. Para calcular el tiempo que tarda la pelota en regresar a su posición inicial, usemos $x(t) = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) = 0 &\Rightarrow -4.9t^2 + 20t = 0 \Rightarrow -t(4.9t - 20) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow -t = 0 \quad \text{o bien} \quad 4.9t - 20 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t_0 = 0 \quad \text{o bien} \quad t_2 = 4.0816. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el tiempo que tarda en regresar es $t_2 = 4.0816$ s.

□

En el ejemplo anterior, el tiempo t_2 es el doble del tiempo t_1 que tarda la pelota en alcanzar la altura máxima. Y también la velocidad en el instante t_2 en el que la pelota regresa a su posición inicial es

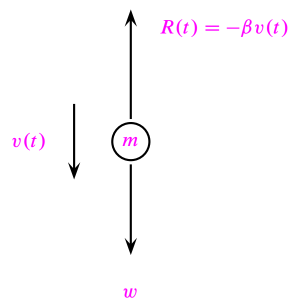
$$v(t_2) = v(4.0816) = -9.8(4.0816) + 20 = -20 \text{ m/s}.$$

Esto es, el modelo sin resistencia del aire predice que un objeto lanzado desde el nivel del suelo hacia arriba dura el mismo tiempo en subir hasta la altura máxima que en volver de esa altura al suelo. Más aún, la rapidez con la que impacta el suelo es la misma con que fue lanzado hacia arriba. Esto puede no ser totalmente cierto en realidad, pues la resistencia del aire desempeña un papel que puede ser importante. Veamos a continuación algunos ejemplos con resistencia del aire.

Ejemplo 3.6.3 *Un paracaidista y su paracaídas pesan* 200 *lb. En el instante en que el paracaídas se abre, él está viajando verticalmente hacia abajo a* 40 *pie/s. Si la resistencia del aire varía de manera directamente proporcional a la velocidad instantánea y su magnitud es de* 180 *lb cuando la velocidad es de* 45 *pie/s:*

1. *Determinar la velocidad y la posición del paracaidista en cualquier instante* $t \ge 0$.
2. *Calcular la velocidad límite.*

▼ Usaremos la siguiente figura:



Consideramos que la dirección positiva es hacia abajo y que $t \ge 0$, a partir de que el paracaídas se abre. La resistencia del aire es R y se cumple que $|\,R\,| = \beta\,|\,v(t)\,|$, con $\beta > 0$, y $R = -\beta v(t)$. Tenemos:

$$v(0) = v_0 = 40 \ \text{pie/s} \quad \& \quad x(0) = x_0 = 0 \quad \& \quad w = mg.$$

Como $mg = w = 200$ lb, entonces $m = \dfrac{200}{g} = \dfrac{200}{32} = \dfrac{25}{4} \Rightarrow m = \dfrac{25}{4}$ slug.
Ya que $|\,R\,| = \beta\,|\,v(t)\,|$ y que $|\,R\,| = 180$ cuando $|\,v(t)\,| = 45$, entonces $\beta = 4$.

1. En cualquier segundo $t \ge 0$ ocurre que

$$\begin{aligned} ma(t) = w + R &\Rightarrow m\frac{d}{dt}v(t) = mg - \beta v(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{25}{4}v'(t) = 200 - 4v(t) \Rightarrow v'(t) = 32 - \frac{16}{25}v(t) \Rightarrow \\ &\Rightarrow v'(t) + \frac{16}{25}v(t) = 32. \end{aligned}$$

Hallamos la velocidad instantánea por la solución del PVI:

$$v'(t) + \frac{16}{25}v(t) = 32, \quad \text{con} \quad v(0) = 40.$$

Esta ecuación diferencial es lineal con factor integrante $e^{\frac{16}{25}t}$. Luego entonces:

$$\begin{aligned} e^{\frac{16}{25}t}\left[v'(t) + \frac{16}{25}v(t)\right] = 32e^{\frac{16}{25}t} &\Rightarrow \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{16}{25}t}v(t)\right] = 32e^{\frac{16}{25}t} \Rightarrow \\ &\Rightarrow e^{\frac{16}{25}t}v(t) = 32\int e^{\frac{16}{25}t}\,dt = 32\left(\frac{25}{16}\right)e^{\frac{16}{25}t} + C = 50e^{\frac{16}{25}t} + C \Rightarrow \\ &\Rightarrow v(t) = 50 + Ce^{-\frac{16}{25}t}. \end{aligned}$$

Ahora bien, $v(0) = 40 \Rightarrow 50 + Ce^0 = 40 \Rightarrow C = -10$.
Por lo tanto, la velocidad instantánea (en pie/s) del paracaidista, en cualquier $t \ge 0$, es

$$v(t) = 50 - 10e^{-\frac{16}{25}t}.$$

Si $x(t)$ es la posición instantánea, medida a partir del punto donde se abre el paracaídas:

$$v(t) = x'(t) \quad \& \quad v(t) = 50 - 10e^{-\frac{16}{25}t} \Rightarrow x'(t) = 50 - 10e^{-\frac{16}{25}t} \Rightarrow x(t) = \int (50 - 10e^{-\frac{16}{25}t})\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = 50t - 10\left(-\frac{25}{16}\right)e^{-\frac{16}{25}t} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t) = 50t + \frac{125}{8}e^{-\frac{16}{25}t} + C.$$

Como $x_0 = x(0) = 0$:

$$x(0) = 0 \Rightarrow 0 = 50(0) + \frac{125}{8}e^0 + C \Rightarrow C = -\frac{125}{8}.$$

Por lo que la posición del paracaidista en el instante (segundo) $t \geq 0$ es (en pies)

$$x(t) = 50t + \frac{125}{8}e^{-\frac{16}{25}t} - \frac{125}{8} \Rightarrow x(t) = 50t + \frac{125}{8}\left(e^{-\frac{16}{25}t} - 1\right).$$

2. La velocidad límite del paracaidista es

$$v_{\text{lím}} = \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty}\left[50 - 10e^{-\frac{16}{25}t}\right] = \lim_{t\to\infty}\left[50 - \frac{10}{e^{\frac{16}{25}t}}\right] = 50 \Rightarrow v_{\text{lím}} = 50 \text{ pie/s}.$$

Observe que esta velocidad ocurre cuando el peso es igual a la fuerza de resistencia del aire.

□

Ejercicios 3.6.1 *Mecánica.* *Soluciones en la página 11*

1. Una piedra cae desde el reposo debido a la gravedad y con resistencia despreciable del aire.
   a. Mediante una ecuación diferencial, modelar el movimiento de la piedra.
   b. Determinar la velocidad (en m/s) de la piedra en cualquier instante $t \geq 0$.
   c. Calcular la posición (en metros) de la piedra en cualquier instante $t \geq 0$.
   d. Calcular la velocidad de la piedra y la distancia recorrida al cabo de 5 s.
   e. Determinar el tiempo en que la piedra alcanza una velocidad de 100 m/s.
   f. Calcular la distancia recorrida entre los segundos 6 y 8 así como entre los segundos 8 y 10.
2. Una máquina de entrenamiento en beisbol se utiliza para lanzar directamente hacia arriba una pelota desde el suelo con velocidad inicial de 40 m/s. Suponiendo que la resistencia del aire es despreciable:
   a. Calcular la altura máxima alcanzada por la pelota y el tiempo que tarda en alcanzarla.
   b. Determinar cuándo y con qué velocidad golpeará la pelota el suelo.
3. Un cuerpo que pesa 8 lb cae desde el reposo hacia la Tierra. Suponiendo que la resistencia del aire es numéricamente igual a $2v(t)$, donde $v(t)$ es la velocidad instantánea en pies/s, calcular:
   a. La velocidad después de t segundos.
   b. La distancia recorrida al cabo de t segundos.
   c. La velocidad límite del cuerpo.
4. Una pequeña gota de aceite de 0.2 g de masa cae en el aire desde el reposo. La resistencia del aire es proporcional a la velocidad instantánea y es de 160 dinas (din) cuando la gota cae a 40 cm/s. Determinar:
   a. La velocidad al cabo de t segundos.

b. La posición después de t segundos.

c. La velocidad límite de la gota.

5. Un paracaidista y su paracaídas pesan 256 lb. En el instante en que el paracaídas se abre, él está cayendo verticalmente a 10 pies/s. Suponiendo que la resistencia del aire es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad instantánea y que ésa es de 400 lb cuando ésta es de 20 pies/s, determinar:

   a. La velocidad del paracaidista al cabo de t segundos.

   b. La posición del paracaidista al cabo de t segundos.

   c. La velocidad límite del paracaidista.

6. Un hombre y su paracaídas pesan 160 lb y caen desde el reposo hacia la Tierra. Antes de que el paracaídas se abra, la resistencia del aire (en libras) es numéricamente igual a $\frac{1}{2}v$ (donde v es la velocidad instantánea en pies/s) y, a partir de que se abre, la resistencia es $\frac{5}{8}v^2$. Si el paracaídas se abre a los 5 s, calcular la velocidad del paracaidista en cualquier segundo t:

   a. Antes de abrirse el paracaídas.

   b. Después de abrirse el paracaídas.

Ejercicios 3.6.1 *Mecánica.* *Página 9*

1. a. $v'(t) = g; \quad v(0) = 0;$
   b. $v(t) = 9.8\,t$ m/s;
   c. $x(t) = 4.9\,t^2$ m;
   d. $v(5) = 49$ m/s; $\quad x(5) = 122.5$ m;
   e. $t = 10.2$ s;
   f. 137.2 m & 176.4 m.
2. a. $t = 4.08$ s; $\quad x_{\text{máx}} = 81.63$ m;
   b. $t = 8.16$ s; $\quad v = -40$ m/s.
3. a. $v(t) = 4(1 - e^{-8t})$ pie/s;
   b. $x(t) = 4t + \dfrac{1}{2}(e^{-8t} - 1)$ pie;
   c. $v_{\text{lím}} = 4$ pie/s.
4. a. $v(t) = 49(1 - e^{-20t})$ cm/s;
   b. $x(t) = 49t + 2.45(e^{-20t} - 1)$ cm;
   c. $v_{\text{lím}} = 49$ cm/s.
5. a. $v(t) = 16\left[\dfrac{13e^{4t} - 3}{13e^{4t} + 3}\right]$ pie/s;
   b. $x(t) = 4\ln(13e^{4t} + 3) + 4\ln(13 + 3e^{-4t}) -$
      $- 8\ln(16);$
   c. $v_{lím} = 16$ pie/s.
6. a. $v(t) = 320\left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$, para $\quad 0 \le t \le 5;$
   b. $v(t) = \dfrac{16[1.291e^{4(t-5)} + 1]}{1.291e^{4(t-5)} - 1}$, para $t \ge 5$.