Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.

1. Mostrar que tanto $\{ y_1 = e^x, y_2 = e^{-x} \}$ como $\{ y_3 = \operatorname{senh} x, y_4 = \cosh x \}$ son conjuntos fundamentales de soluciones para la ecuación diferencial $y'' - y = 0$.

   d 1

2. a. Verificar que $y_1 = x^2$ & $y_2 = x^{-1}$ son soluciones de la ecuación diferencial $x^2 y'' - 2y = 0$. ¿La combinación lineal $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es solución de la ecuación?
   b. Verificar que $y_1 = 1$ & $y_2 = x^{\frac{1}{2}}$ son soluciones de la ecuación diferencial $y y'' + (y')^2 = 0$. ¿La combinación lineal $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es solución de la ecuación (en general)?
   c. Si hay alguna diferencia entre a. & b., ¿en qué radica esta diferencia?

   d 2

3. a. Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. ¿Es $y_2(x) = c y_1(x)$ solución de la ecuación diferencial?
   b. Si V representa el conjunto de todas las soluciones de la anterior ecuación diferencial, ¿es V un espacio vectorial?

   d 3

4. Calcular el wronskiano de cada uno de los siguientes pares de funciones:
   a. $y_1 = \operatorname{sen} x$ & $y_2 = \cos x$.
   b. $y_1 = e^{-2x} \operatorname{sen} x$ & $y_2 = e^{-2x} \cos x$.
   c. $y_1 = \operatorname{senh} 3x$ & $y_2 = 4(e^{3x} - e^{-3x})$.
   d. $y_1 = x \operatorname{sen} 2x$ & $y_2 = \operatorname{sen} 2x$.

   d 4

5. a. Extender la definición de wronskiano para el caso de tres funciones.
   b. Calcular el wronskiano de cada una de las siguientes ternas de funciones:
      i. $y_1 = e^x, y_2 = xe^x$ & $y_3 = x^2 e^x$.
      ii. $y_1 = \cos x, y_2 = \operatorname{sen} x$ & $y_3 = 1$.
      iii. $y_1 = \cos x + \operatorname{sen} x, y_2 = \cos x - \operatorname{sen} x$ & $y_3 = \cos x$.

   d 5

En cada uno de los siguientes ejercicios, verificar que el conjunto dado es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación proporcionada; después encontrar la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas.

6. $y'' + y' - 2y = 0$; $\left\{ y_1 = e^x, y_2 = e^{-2x} \right\}$, con $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

   d 6

7. $y'' + 4y = 0$; $\{ y_1 = \cos 2x, y_2 = \operatorname{sen} 2x \}$, con $y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.

   d 7

8. $y''' - 2y'' + 5y' = 0$; $\{ y_1 = 1, y_2 = e^x \cos 2x, y_3 = e^x \operatorname{sen} 2x \}$, con $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$.

   d 8

9. $x^2 y'' + 2xy' - 6y = 0$; $\left\{ y_1 = x^2, y_2 = x^{-3} \right\}$, con $y(2) = 1,\ y'(2) = 0$.

   d 9

10. $xy'' + y' = 0$; $\{ y_1 = 1, y_2 = \ln x \}$, con $y(1) = 2,\ y'(1) = 3$.

    d 10

11. Determinar la dependencia o independencia lineal de cada uno de los siguientes conjuntos de funciones:

    a. $\{ e^x, e^{-x}, 2 \}$.
    b. $\{ \operatorname{arcsen} x, \arccos x, \pi \}$.
    c. $\left\{ e^{4x}, e^{-4x}, \cosh 4x \right\}$.
    d. $\left\{ e^x \cos 2x, e^x \operatorname{sen} 2x, e^{-4x} \right\}$.

    d 12

12. Suponga que y_1 sea una solución no nula de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.

    a. Verifique que, si y_2 es una segunda solución tal que $\{ y_1, y_2 \}$ sea linealmente independiente, entonces $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right) = \dfrac{W(y_1, y_2)}{y_1^2}$.
    b. Verifique que $y_1 = x$ sea una solución de $x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0$; use a. para determinar la solución general de la ecuación diferencial.

    d 13

13. a. Muestre que $y_1 = 3x^2 - 1$ satisface a la ecuación $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ y tiene un mínimo en $x = 0$.
    b. Verifique ahora que cualquier otra solución y_2 no podrá tener mínimo en $x = 0$, si $\{ y_1, y_2 \}$ es linealmente independiente .

    d 14

14. Demuestre que $y = x^3$ es una solución de $yy'' = 6x^4$, pero que, si $c^2 \neq 1$, entonces $y = cx^3$ no es una solución de la ecuación diferencial. ¿Por qué este hecho no contradice la teoría discutida en esta sección?

    d 15

15. Compruebe que $y_1 = 1$ & $y_2 = x^{\frac{1}{2}}$ son soluciones de $yy'' + (y')^2 = 0$, pero que la suma $y = y_1 + y_2$ no es solución. ¿Por qué este hecho no contradice la teoría discutida en esta sección?

    d 16

16. a. Determine si el conjunto de funciones $\left\{ y_1 = \operatorname{sen} x^2, y_2 = \cos x^2 \right\}$ es linealmente dependiente o independiente.
    b. Calcule $W(y_1, y_2)(0)$.
    c. ¿Existe una ecuación de la forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (en la que p & q sean funciones continuas) tal que y_1 & y_2 sean soluciones de la ecuación diferencial?

    d 17

En los siguientes ejercicios se proporciona una ecuación diferencial no homogénea, una solución particular, condiciones iniciales y un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial homogénea asociada, respectivamente. En cada caso encuentre la solución particular del PVI.

17. $y'' + y = 3x;\ y_p = 3x,\ \text{con } y(0) = 2,\ y'(0) = -2;\ \{\cos x, \operatorname{sen} x\}$.

    d 18

18. $y'' - 2y' - 3y = 6;\ y_p = -2,\ \text{con } y(0) = 3,\ y'(0) = 11;\ \{e^{-x}, e^{3x}\}$.

    d 19

19. $y'' - 4y = \operatorname{senh} x;\ y_p = -\frac{1}{3}\operatorname{senh} x,\ \text{con } y(0) = 0,\ y'(0) = 1;\ \{e^{2x}, e^{-2x}\}$.

    d 20