CAPÍTULO

# 4

# Ecuaciones diferenciales de orden superior

## 4.6 Método de coeficientes indeterminados

En esta sección presentamos un método que se utiliza para encontrar una solución particular de una ED lineal no homogénea de orden $n$. La necesidad de encontrar dichas soluciones particulares proviene del siguiente resultado, que generaliza al que vimos en la página **??**:

- La solución general de una ED lineal no homogénea

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

está dada por

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x),$$

donde

$y_p(x)$ es una solución particular de esta ED no homogénea, que es una solución conocida.

$y_c(x)$ es la solución complementaria, que es la solución general de la ED lineal homogénea asociada:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_3(x)y^{(3)}(x) + a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

es decir, $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$, donde $y_1(x),\ y_2(x), \cdots, y_n(x)$ forman un conjunto fundamental de soluciones para la lineal homogénea.

El método de coeficientes indeterminados es un procedimiento utilizado para obtener una solución particular $y_p(x)$ para la ED lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$a_ny^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} +, \cdots, +a_3y^{(3)} + a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x).$$

Una restricción que existe para poder aplicar este método consiste en el tipo de función que puede ser $g(x)$. El método funcionará adecuadamente cuando $g(x)$ sólo sea alguno de los tipos siguientes:

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

1. $g(x) = P_n(x)$, un polinomio de grado $n \geq 0$.

   Los polinomios de grado $n$ son generados por las funciones $\{\, 1, x, \cdots, x^n \,\}$ y, como se ha visto en este contexto, estas funciones están asociadas a la raíz cero de multiplicidad $n+1$ de la ecuación característica.

2. $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$; con $\alpha$ constante y $P_n$ un polinomio de grado $n$.

   Estas funciones son generadas por las funciones $\{\, e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, \cdots, x^n e^{\alpha x} \,\}$, las cuales estan asociadas a la raíz $\alpha$ de multiplicidad $n+1$ de la ecuación característica.

3. $g(x) = P_n(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_n(x)\cos\beta x$, donde $\beta$ es constante; $P_n$ & $Q_n$ son polinomios con el mayor de sus grados igual a $n$.

   Estas funciones son generadas por las funciones

   $$\{\, \cos\beta x, x\cos\beta x, \cdots, x^n\cos\beta x \,\} \quad \text{y} \quad \{\, \operatorname{sen}\beta x, x\operatorname{sen}\beta x, \cdots, x^n\operatorname{sen}\beta x \,\},$$

   las cuales están asociadas a las raíces $\pm i\beta$, ambas de multiplicidad $n+1$ de la ecuación característica.

4. $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + Q_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ con $\alpha$ y $\beta$ constantes; $P_n$ & $Q_n$ son polinomios de manera que el mayor de los grados entre ellos es $n$.

   Estas funciones son generadas por las funciones

   $$\{\, e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \cdots, x^n e^{\alpha x}\cos\beta x \,\} \quad \text{y} \quad \{\, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, xe^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x, \cdots, x^n e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x \,\},$$

   las cuales están asociadas a las raíces $\alpha \pm i\beta$, ambas de multiplicidad $n+1$ de la ecuación característica.

5. $g(x)$ puede ser combinación lineal de funciones de los 4 tipos anteriores.

Observemos que:

- Si $g(x) = P_n(x)$, entonces $g(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$ con $\alpha = 0$.

  Es decir, todo polinomio $P_n(x)$ puede ser considerado de la forma $P_n(x)e^{\alpha x}$, donde $\alpha = 0$.

- Con $\alpha = 0$: $P_n(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_n(x)\cos\beta x = e^{\alpha x}(P_n(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_n(x)\cos\beta x)$.

  Es decir, todas las funciones del tipo 3 son un caso particular de las del tipo 4.

Como se ha dicho, el método de coeficientes indeterminados sirve para determinar una solución particular $y_p(x)$ de la ED lineal no homogénea con coeficientes constantes

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(x).$$

Expresado de otra manera, este método sirve para encontrar una función $y = y_p(x)$ tal que, al aplicársele el operador dado por

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y,$$

el resultado sea, precisamente, la función $g(x)$. Esto es,

$$L[y_p(x)] = g(x).$$

A continuación mostraremos, mediante ejemplos, cómo al aplicar el operador $L[y]$ se transforman ciertos tipos de funciones, para poder empezar a extraer algunas conclusiones importantes.

**Ejemplo 4.6.1** *Sea la ED $L[y] = y'' + 2y' - 8y = 0$. Analizar la forma en la que se transforman las funciones $y = x^2 - 1$, $y = e^{2x}$, $y = \operatorname{sen} x - \cos x$, $y = e^{-4x}$ & $y = (2x-1)e^{3x}$ al aplicarles el operador $L[y]$.*

▼

1. El polinomio auxiliar asociado a la ED es
$$P(r) = r^2 + 2r - 8 = (r-2)(r+4).$$
2. Si $y = x^2 - 1$, entonces $y' = 2x$ & $y'' = 2$. Luego,
$$L[y] = L[x^2 - 1] = (2) + 2(2x) - 8(x^2 - 1) = -8x^2 + 4x + 10.$$
Aquí, un polinomio de grado 2 es transformado en otro polinomio del mismo grado.
3. Si $y = e^{2x}$, entonces $y' = 2e^{2x}$ & $y'' = 4e^{2x}$. Luego,
$$L[y] = L[e^{2x}] = (4e^{2x}) + 2(2e^{2x}) - 8(e^{2x}) = 0.$$
Observe que, la exponencial $e^{2x}$ es anulada por $L[y]$; es decir, $e^{2x}$ es solución de la ecuación diferencial. Además 2 es una raíz del polinomio auxiliar.
4. Si $y = \operatorname{sen} x - \cos x$, entonces $y' = \cos x + \operatorname{sen} x$ & $y'' = -\operatorname{sen} x + \cos x$. Luego,
$$L[y] = (-\operatorname{sen} x + \cos x) + 2(\cos x + \operatorname{sen} x) - 8(\operatorname{sen} x - \cos x) = 11\cos x - 7\operatorname{sen} x.$$
Aquí, una combinación lineal de $\operatorname{sen} x$ & $\cos x$ se transforma en otra combinación lineal de las mismas funciones. Ambas funciones están asociadas a los números $\pm i$, que no son raíces del polinomio auxiliar.
5. Si $y = e^{-4x}$, entonces $y' = -4e^{-4x}$ & $y'' = 16e^{-4x}$. Luego,
$$L[y] = L[e^{-4x}] = (16e^{-4x}) + 2(-4e^{-4x}) - 8(e^{-4x}) = 0.$$
Es decir, la exponencial $e^{-4x}$ es anulada por $L[y]$; es decir, $e^{-4x}$ es solución de la ecuación diferencial. Además $-4$ es una raíz del polinomio auxiliar.
6. Si $y = (2x-1)e^{3x}$, entonces $y' = (6x-1)e^{3x}$ & $y'' = (18x+3)e^{3x}$. Luego,
$$L[y] = (18x+3)e^{3x} + 2(6x-1)e^{3x} - 8(2x-1)e^{3x} = (14x+9)e^{3x}.$$
Esto es, el producto de un polinomio $P_1(x)$ por la exponencial $e^{3x}$ es transformado en otro producto del mismo tipo de funciones, $P_1(x)e^{3x}$. Además 3 no es raíz del polinomio auxiliar.

□

**Ejemplo 4.6.2** *Sea la ED $L[y] = y'' - y' - 6y = 0$. Analizar la forma en la que se transforman las funciones $y = (3x^2-1)e^{2x}$, $y = (x^3+1)e^{-2x}$, $y = (2-x^2)e^{3x}$ & $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$ al aplicarles el operador $L[y]$.*

▼

1. El polinomio característico asociado a $L[y]$ es
$$p(r) = r^2 - r - 6 = (r+2)(r-3);$$
el cual tiene por raíces de multiplicidad 1, $r = -2$ & $r = 3$, por lo que
$$L[y] = 0, \text{ para } y = e^{-2x} \quad \& \quad y = e^{3x}.$$
Aún más, $L[y] = 0$, para $y = c_1e^{-2x} + c_2e^{3x}$, con $c_1$ & $c_2$ constantes, que es la solución general de la ED homogénea.

2. Si $y = (3x^2 - 1)e^{2x}$, entonces $y' = (6x^2 + 6x - 2)e^{2x}$ & $y'' = (12x^2 + 24x + 2)e^{2x}$. Luego,

$$L[y] = (12x^2 + 24x + 2)e^{2x} - (6x^2 + 6x - 2)e^{2x} - 6(3x^2 - 1)e^{2x} = \\ = (-12x^2 + 18x + 10)e^{2x}.$$

Observamos que el producto de un polinomio de grado dos, $P_2(x) = (3x^2 - 1)$, por la exponencial $e^{2x}$ es transformado en otro producto del mismo tipo: un polinomio de grado dos, $\widehat{P}_2(x) = -12x^2 + 18x + 10$, por la exponencial $e^{2x}$. Y vemos que la exponencial $e^{2x}$ está asociada a $r = 2$, que no es raíz del polinomio característico.

3. Si $y = (x^3 + 1)e^{-2x}$, entonces $y' = (-2x^3 + 3x^2 - 2)e^{-2x}$ & $y'' = (4x^3 - 12x^2 + 6x + 4)e^{-2x}$. Luego,

$$L[y] = (4x^3 - 12x^2 + 6x + 4)e^{-2x} - (-2x^3 + 3x^2 - 2)e^{-2x} - 6(x^3 + 1)e^{-2x} = \\ = (-15x^2 + 6x)e^{-2x}.$$

Es decir, comprobamos que el producto de un polinomio de grado tres, $P_3(x) = x^3 + 1$, por la exponencial $e^{-2x}$, se transforma en un producto de un polinomio de grado dos, $\widehat{P}_2(x) = -15x^2 + 6x$, por la exponencial $e^{-2x}$. El factor polinomial bajó un grado. Y notamos que $e^{-2x}$ está asociada a $r = -2$, que sí es raíz del polinomio característico y además tiene multiplicidad 1.

4. Si $y = (2 - x^2)e^{3x}$, entonces $y' = (-3x^2 - 2x + 6)e^{3x}$ & $y'' = (-9x^2 - 12x + 16)e^{3x}$. Luego,

$$L[y] = (-9x^2 - 12x + 16)e^{3x} - (-3x^2 - 2x + 6)e^{3x} - 6(2 - x^2)e^{3x} = \\ = (-10x - 2)e^{3x}.$$

Observamos que el producto de un polinomio de grado dos, $P_2(x) = 2 - x^2$, por la exponencial $e^{3x}$ es transformado en un producto de un polinomio de grado uno, $\widehat{P}_1(x) = -10x - 2$, por la exponencial $e^{3x}$. El factor polinomial bajó un grado. Vemos también que $e^{3x}$ está asociada a $r = 3$, que es una raíz de multiplicidad 1, del polinomio característico.

5. Si $y = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, entonces $y' = 12x^2 - 6x + 2$ & $y'' = 24x - 6$. Luego,

$$L[y] = (24x - 6) - (12x^2 - 6x + 2) - 6(4x^3 - 3x^2 + 2x - 1) = \\ = -24x^3 + 6x^2 + 18x - 2.$$

Como vimos, un polinomio de grado tres, $P_3(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, fue transformado en otro polinomio del mismo grado, $\widehat{P}_3(x) = -24x^3 + 6x^2 + 18x - 2$. Observamos además que $y = P_3(x) = P_3(x)e^{0x}$ está asociado a $r = 0$, que no es raíz del polinomio característico.

□

**Ejemplo 4.6.3** *Sea la ED $L[y] = y''' - 2y'' + y' = 0$. Analizar la forma en la que se transforman las funciones $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$, $y = x^4 - x^2 + 1$, $y = (x^3 + x^2 - x - 1)e^x$ & $y = 3\operatorname{sen} 2x - \cos 2x$ al aplicarles el operador $L[y]$.*

▼

1. El polinomio característico asociado a $L[y]$ es

$$P(r) = r^3 - 2r^2 + r = r(r^2 - 2r + 1) = r(r - 1)^2;$$

el cual tiene por raíces $r = 0$, de multiplicidad 1, y $r = 1$, de multiplicidad 2, por lo que:

   a. $L[y] = 0$ para $y = e^{0x} = 1$; $y = e^x$ & $y = xe^x$.
   b. Aún más: $L[y] = 0$ para $y = c_1 + c_2e^x + c_3xe^x$, con $c_1, c_2$ & $c_3$ constantes.

2. Si $y = (x^2+x+1)e^{-x}$, entonces $y' = (-x^2+x)e^{-x}$; $y'' = (x^2-3x+1)e^{-x}$ & $y''' = (-x^2+5x-4)e^{-x}$. Luego,
$$L[y] = (-x^2+5x-4)e^{-x} - 2(x^2-3x+1)e^{-x} + (-x^2+x)e^{-x} =$$
$$= (-4x^2+12x-6)e^{-x}$$
Esto es, el producto de un polinomio de grado dos, $P_2(x) = x^2+x+1$, por la exponencial $e^{-x}$ fue transformado en otro producto del mismo tipo, en polinomio de grado dos, $\widehat{P}_2(x) = -4x^2+12x-6$, por la exponencial $e^{-x}$. Y vemos que la exponencial $e^{-x}$ está asociada a $r = -1$, que no es raíz del polinomio característico.

3. Si $y = x^4 - x^2 + 1$, entonces $y' = 4x^3 - 2x$; $y'' = 12x^2 - 2$ & $y''' = 24x$. Luego,
$$L[y] = (24x) - 2(12x^2-2) + (4x^3-2x) = 4x^3 - 24x^2 + 22x + 4.$$
Es decir, un polinomio de grado cuatro, $P_4(x) = x^4 - x^2 + 1$, fue transformado en un polinomio de grado tres, $\widehat{P}_3(x) = 4x^3 - 24x^2 + 22x + 4$. El polinomio bajó un grado. Y notamos que $y = P_4(x) = P_4(x)e^{0x}$ está asociado a $r = 0$, que es una raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico.

4. Si $y = (x^3+x^2-x-1)e^x$, entonces:
$y' = (x^3+4x^2+x-2)e^x$, $y'' = (x^3+7x^2+9x-1)e^x$ & $y''' = (x^3+10x^2+23x+8)e^x$. Luego,
$$L[y] = (x^3+10x^2+23x+8)e^x - 2(x^3+7x^2+9x-1)e^x + (x^3+4x^2+x-2)e^x =$$
$$= (6x+8)e^x.$$
Como vemos, el producto de un polinomio de grado tres, $P_3(x) = x^3+x^2-x-1$, por la exponencial $e^x$ es transformado en un producto de un polinomio de grado uno, $\widehat{P}_1(x) = 6x+8$, por la exponencial $e^x$. El factor polinomial bajó dos grados. Y notamos que $e^x$ está asociada a $r = 1$, que es una raíz de multiplicidad dos del polinomio característico.

5. Si $y = 3\operatorname{sen} 2x - \cos 2x$, entonces:
$y' = 6\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x$, $y'' = -12\operatorname{sen} 2x + 4\cos 2x$ & $y''' = -24\cos 2x - 8\operatorname{sen} 2x$. Luego,
$$L[y] = (-24\cos 2x - 8\operatorname{sen} 2x) - 2(-12\operatorname{sen} 2x + 4\cos 2x) + (6\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x) =$$
$$= 18\operatorname{sen} 2x - 26\cos 2x.$$
Como se observa, una combinación lineal de $\operatorname{sen} 2x$ & $\cos 2x$ se transformó en otra combinación lineal de $\operatorname{sen} 2x$ & $\cos 2x$. Y encontramos que $\operatorname{sen} 2x = e^{0x}\operatorname{sen} 2x$ & $\cos 2x = e^{0x}\cos 2x$ son funciones asociadas a $r = 0 \pm 2i = \pm 2i$, que no son raíces del polinomio característico.

□

**Ejemplo 4.6.4** *Sea la ED* $L[y] = y^{(5)} + y^{(3)} = 0$. *Analizar la forma en la que se transforman las funciones* $y = x^2e^x$, $y = x^8 - x^4 + 1$, $y = x\operatorname{sen} x - x\cos x$ & $y = 3\operatorname{sen} 2x - 2\cos 2x$ *al aplicarles el operador* $L[y]$.

▼

1. El polinomio característico asociado a $L[y]$ es
$$P(r) = r^5 + r^3 = r^3(r^2+1),$$
el cual tiene $r = 0$ como una raíz de multiplicidad 3 y $r = \pm i$ como raíces complejas conjugadas de multiplicidad 1, por lo que
   a. $L[y] = 0$ para $y = e^{0x} = 1$, $y = xe^{0x} = x$, $y = x^2e^{0x} = x^2$, $y = e^{0x}\cos x = \cos x$ & $y = e^{0x}\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x$.
   b. Aún más: $L[y] = 0$ para $y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4\cos x + c_5\operatorname{sen} x$, con $c_1, c_2, c_3, c_4$ & $c_5$ constantes arbitrarias, es la solución general de la ED.

2. Si $y = x^2e^x$, entonces:

$$y' = (x^2 + 2x)e^x; \qquad y^{(4)} = (x^2 + 8x + 12)e^x;$$
$$y'' = (x^2 + 4x + 2)e^x; \qquad y^{(5)} = (x^2 + 10x + 20)e^x.$$
$$y^{(3)} = (x^2 + 6x + 6)e^x;$$

Luego,
$$L[y] = (x^2 + 10x + 20)e^x + (x^2 + 6x + 6)e^x = (2x^2 + 16x + 26)e^x.$$
De lo anterior, el producto de un polinomio de grado dos, $P_2(x) = x^2e^x$, por la exponencial $e^x$ se transforma en otro producto de polinomio de grado dos, $\widehat{P}_2(x) = 2x^2 + 16x + 26$, por la misma exponencial $e^x$. Observamos además que la exponencial $e^x$ está asociada a $r = 1$, que no es raíz del polinomio característico.

3. Si $y = x^8 - x^4 + 1$, entonces:

$$y' = 8x^7 - 4x^3; \qquad y^{(4)} = 1\,680x^4 - 24;$$
$$y'' = 56x^6 - 12x^2; \qquad y^{(5)} = 6\,720x^3.$$
$$y^{(3)} = 336x^5 - 24x;$$

Luego,
$$L[y] = (6\,720x^3) + (336x^5 - 24x) = 336x^5 + 6\,720x^3 - 24x.$$
Aquí un polinomio de grado ocho, $P_8(x) = x^8 - x^4 + 1$, es transformado en un polinomio de grado cinco, $\widehat{P}_5(x) = 336x^5 + 6\,720x^3 - 24x$. El polinomio disminuyó tres grados. Y hallamos también que el polinomio $y = P_8(x) = P_8(x)e^{0x}$ está asociado a $r = 0$, que es una raíz de multiplicidad 3 del polinomio característico.

4. Si $y = x \operatorname{sen} x - x \cos x$, entonces:

$$y' = (x + 1) \operatorname{sen} x + (x - 1) \cos x; \qquad y^{(4)} = (x - 4) \operatorname{sen} x + (-x - 4) \cos x;$$
$$y'' = (-x + 2) \operatorname{sen} x + (x + 2) \cos x; \qquad y^{(5)} = (x + 5) \operatorname{sen} x + (x - 5) \cos x.$$
$$y^{(3)} = (-x - 3) \operatorname{sen} x + (-x + 3) \cos x;$$

Luego,
$$L[y] = [(x + 5) \operatorname{sen} x + (x - 5) \cos x] + [(-x - 3) \operatorname{sen} x + (-x + 3) \cos x] = 2 \operatorname{sen} x - 2 \cos x.$$
Vimos que, una expresión de la forma $P_1(x) \operatorname{sen} x + \widehat{P}_1(x) \cos x$, donde $P_1(x) = x$ & $\widehat{P}_1(x) = -x$ son polinomios de grado 1, es transformada en sólo una combinación lineal de $\operatorname{sen} x$ & $\cos x$. El factor polinomial pierde un grado. Y encontramos que $\operatorname{sen} x$ & $\cos x$ están asociadas a $r = \pm i$, que son raíces de multiplicidad 1 del polinomio característico.

5. Si $y = 3 \operatorname{sen} 2x - 2 \cos 2x$, entonces

$$y' = 4 \operatorname{sen} 2x + 6 \cos 2x; \qquad y^{(4)} = 48 \operatorname{sen} 2x - 32 \cos 2x;$$
$$y'' = -12 \operatorname{sen} 2x + 8 \cos 2x; \qquad y^{(5)} = 64 \operatorname{sen} 2x + 96 \cos 2x.$$
$$y^{(3)} = -16 \operatorname{sen} 2x - 24 \cos 2x;$$

Luego,
$$L[y] = (64 \operatorname{sen} 2x + 96 \cos 2x) + (-16 \operatorname{sen} 2x - 24 \cos 2x) = 48 \operatorname{sen} 2x + 72 \cos 2x.$$
Y ahora vimos que, una combinación lineal de $\operatorname{sen} 2x$ & $\cos 2x$ es transformada en otra combinación lineal de $\operatorname{sen} 2x$ & $\cos 2x$. Además las funciones $\operatorname{sen} 2x$ & $\cos 2x$ están asociadas a $r = \pm 2i$, que no son raíces del polinomio característico.

□

Podemos resumir algunas observaciones hechas en los ejemplos previos que servirán para dar soporte al método de coeficientes indeterminados; éstas van en el sentido de resaltar las transformaciones que resultan por la aplicación del operador $L[y]$ sobre las funciones $y = f(x)$ suministradas. Para esto, comparamos a la función dada $y = f(x)$ con la función $F(x) = L[f(x)]$ obtenida después de ser aplicado dicho operador $L[y]$.

| Función dada | | Operador | | Función obtenida |
|---|---|---|---|---|
| $y = f(x)$ | $\longrightarrow$ | $L[y]$ | $\longrightarrow$ | $F(x) = L[f(x)]$. |

1. Para empezar, es necesario conocer el polinomio característico $P(r)$ asociado al operador $L[y]$, así como sus raíces, con sus respectivas multiplicidades.
2. Cuando la función proporcionada es de la forma
$$y = f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_n(x)\cos\beta x\right],$$
y $r = \alpha \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación auxiliar, entonces la función obtenida $F(x) = L[f(x)]$ tendrá el mismo tipo y característica que la original, es decir:
$$L[f(x)] = F(x) = e^{\alpha x}\left[\widehat{P}_n(x)\operatorname{sen}\beta x + \widehat{Q}_n(x)\cos\beta x\right].$$
   - Si $f(x)$ es un polinomio $P_n(x)$ de grado $n$ y $r = 0$ no es raíz del polinimio auxiliar, entonces $L[f(x)]$ es otro polinomio de grado $n$.
   - Si $f(x) = P_n(x)e^{rx}$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado $n$ y $r = \alpha$ no es raíz de la ecuación auxiliar, entonces de manera similar $L[f(x)] = \widehat{P}_n(x)e^{rx}$.
   - Si $f(x) = P_n(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_n(x)\cos\beta x$, donde $P_n(x)$ & $Q_n(x)$ son polinomios con el mayor de sus grados igual a $n$ y si $r = \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación auxiliar, entonces:
$$L[f(x)] = \widehat{P}_n(x)\operatorname{sen}\beta x + \widehat{Q}_n(x)\cos\beta x,$$
donde $\widehat{P}_n(x)$ & $\widehat{Q}_n(x)$ son otros polinomios con el mayor de sus grados igual a $n$.
   - De manera similar, y generalizando los puntos anteriores, si $r = \alpha \pm i\beta$ no son raíces de la ecuación auxiliar asociada a $L[y]$, entonces:
$$L\left[e^{\alpha x}\left(P_n(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_n(x)\cos\beta x\right)\right] = e^{\alpha x}\left[\widehat{P}_n(x)\operatorname{sen}\beta x + \widehat{Q}_n(x)\cos\beta x\right];$$
donde $P_n(x)$ & $Q_n(x)$ son polinomios con el mayor de sus grados igual a $n$; además, $\widehat{P}_n(x)$ & $\widehat{Q}_n(x)$ son otros polinomios con el mayor de sus grados igual a $n$.
3. Cuando la función dada $y = f(x)$ es
$$y = f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\operatorname{sen}\beta x + Q_n(x)\cos\beta x\right],$$
y si $r = \alpha \pm i\beta$ son raíces del polinomio auxiliar, entonces la función $L[f(x)]$ obtenida será del mismo tipo, pero su característica se modificará, disminuyendo en general el grado de los polinomios. A grandes rasgos:
$$F(x) = L[F(x)] = e^{\alpha x}\left[\widehat{P}_k(x)\operatorname{sen}\beta x + \widehat{Q}_k(x)\cos\beta x\right],$$
con $k < n$.

- Si $f(x) = P_n(x)$ es un polinomio de grado $n$ y $r = 0$ es una raíz de el polinomio característico, con multiplicidad $m$, entonces:
  a. Si $m = 1$, la función obtenida $F(x) = L[f(x)] = \widehat{P}_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$.
  b. Si $m = 2$, la función obtenida $F(x) = L[f(x)] = \widehat{P}_{n-2}(x)$ es un polinomio de grado $n-2$.
  c. Si $m \leq n$, la función obtenida $F(x) = L[f(x)] = \widehat{P}_{n-m}(x)$ es un polinomio de grado $n-m$.
  d. Por supuesto, si $m > n$, entonces $F(x) = L[P_n(x)] = 0$, pues cualquier polinomio de grado $n \leq m$ será solución de la ED $L[y] = 0$.
- Si $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, donde $P_n(x)$ es un polinomio de grado $n$, y si $r = \alpha$ es una raíz del polinomio característico, de multiplicidad $m$, entonces:
  a. Si $m = 1$, la función obtenida $F(x) = L[P_n(x)e^{\alpha x}] = \widehat{P}_{n-1}(x)e^{\alpha x}$, donde $\widehat{P}_{n-1}(x)$ es un polinomio de grado $n-1$.
  b. Si $m = 2$, la función obtenida $F(x) = L[P_n(x)e^{\alpha x}] = \widehat{P}_{n-2}(x)e^{\alpha x}$, donde $\widehat{P}_{n-2}(x)$ es un polinomio de grado $n-2$.
  c. Si $m \leq n$, la función obtenida $F(x) = L[P_n(x)e^{\alpha x}] = \widehat{P}_{n-m}(x)e^{\alpha x}$, donde $\widehat{P}_{n-m}(x)$ es un polinomio de grado $n-m$.
  d. Si $m > n$, de manera análoga al caso anterior, $F(x) = L[P_n(x)] = 0$.
- Si $f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x) \operatorname{sen} \beta x + Q_n(x) \cos \beta x\right]$, donde $P_n(x)$ & $Q_n(x)$ son polinomios con el mayor de sus grados igual a $n$ y si $r = \alpha \pm i\beta$ son raíces de la ecuación auxiliar, de multiplicidad $m$, entonces:
  a. Si $m = 1$, la función obtenida será
  $$F(x) = L[f(x)] = e^{\alpha x}\left[\widehat{P}_{n-1}(x) \operatorname{sen} \beta x + \widehat{Q}_{n-1}(x) \cos \beta x\right],$$
  donde $\widehat{P}_{n-1}(x)$ & $\widehat{Q}_{n-1}(x)$ son polinomios con el mayor de sus grados igual a $n-1$.
  b. Si $m = 2$, la función obtenida será
  $$F(x) = L[f(x)] = e^{\alpha x}\left[\widehat{P}_{n-2}(x) \operatorname{sen} \beta x + \widehat{Q}_{n-2}(x) \cos \beta x\right],$$
  donde $\widehat{P}_{n-2}(x)$ & $\widehat{Q}_{n-2}(x)$ son polinomios con el mayor de sus grados igual a $n-2$.
  c. Si $m \leq n$, la función obtenida será
  $$F(x) = L[f(x)] = e^{\alpha x}\left[\widehat{P}_{n-m}(x) \operatorname{sen} \beta x + \widehat{Q}_{n-m}(x) \cos \beta x\right],$$
  donde $\widehat{P}_{n-m}(x)$ & $\widehat{Q}_{n-m}(x)$ son polinomios con el mayor de sus grados igual a $n-m$.
  d. Igual que los casos anteriores, si la multiplicidad $m$ de las raíces $\alpha \pm i\beta$ de la ecuación auxiliar asociada a la ED $L[y] = 0$ es mayor que $n$ (el grado máximo de $P_n(x)$ & $Q_n(x)$) entonces:
  $$L\left[e^{\alpha x}\left(P_n(x) \operatorname{sen} \beta x + Q_n(x) \cos \beta x\right)\right] = 0.$$

### 4.6.1 El método

Como ya hemos dicho, el método de coeficientes indeterminados se utiliza para encontrar una función $y = y_p(x)$, que al serle aplicada el operador:

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y$$

produzca como resultado la función $g(x)$ conocida.
Esto es, dadas la función $g(x)$ y el operador $L[f(x)]$, determinar la función $y = y_p(x)$ tal que

| Función desconocida | | Operador | | Función conocida |
|---|---|---|---|---|
| $y = y_p(x)$ | $\longrightarrow$ | $L[y]$ | $\longrightarrow$ | $g(x) = L[y_p(x)]$. |

Siendo así, para determinar una solución particular $y = y_p(x)$ de la ecuación diferencial $L[y] = g(x)$, se propone el procedimiento siguiente:

1. Encontrar el polinomio característico $P(r)$ asociado al operador $L[y]$ y determinar sus raíces con sus respectivas multiplicidades.
2. Analizar la función conocida $g(x)$ y decidir si tiene o no relación con alguna de las raíces de $P(r)$.
3. Si $g(x)$ no tiene relación con alguna de las raíces de $P(r)$, entonces se propone que $y_p(x)$ sea del mismo tipo que $g(x)$.
4. Si $g(x)$ está relacionada con alguna raíz $r$ de $P(r)$ y ésta tiene multiplicidad $m$, entonces se propone que $y_p(x)$ sea el producto de $x^m$ por una función del mismo tipo que $g(x)$.

Como podrá notarse, a la función $y_p = f(x)$ que se propone del mismo tipo que la función $g(x)$, se le multiplica por el factor polinomial $x^m$, para así compensar el decrecimiento del grado del polinomio $P_n(x)$ contenido en $f(x)$ que observamos en los ejemplos anteriores. Esta función $y_p$ tiene los coeficientes del polinomio $P_n(x)$ desconocidos, los cuales determinaremos al sustituir $y_p$ en el operador e igualar el resultado con $g(x)$.

**Ejemplo 4.6.5** *Obtener la solución general de la ED lineal no homogénea*

$$y'' - 4y' + 3y = 9x^2 - 36x + 37,$$

*por el método de coeficientes indeterminados.*

▼ Primero se obtiene la solución general de la homogénea asociada:

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

Proponiendo $y = e^{rx}$, se obtiene la ecuación característica:

$$r^2 - 4r + 3 = 0,$$

que tiene por soluciones $r = 1 \quad \& \quad r = 3$, ambas de multiplicidad uno.
Por lo anterior, la solución complementaria de la ED dada es

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{3x}.$$

Ahora obtenemos una solución particular $y_p$ de la ED lineal:

$$y'' - 4y' + 3y = 9x^2 - 36x + 37.$$

Observe que la función $g(x) = 9x^2 - 36x + 37$ es un polinomio de grado 2.
Es decir: $g(x) = P_2(x) = P_2(x)e^0 = P_2(x)e^{0x}$, donde se tiene el factor $e^{rx}$, con $r = 0$.
Como $r = 0$ no es raíz del polinomio característico $P(r) = r^2 - 4r + 3$, entonces se propone como solución particular una función del mismo tipo que $g(x)$:

$$y_p(x) = x^0(Ax^2 + Bx + C) = Ax^2 + Bx + C,$$

donde $A, B, C$ son coeficientes que deberán ser determinados. Ahora,

$$y_p = Ax^2 + Bx + C \;\Rightarrow\; y_p' = 2Ax + B \;\Rightarrow\; y_p'' = 2A.$$

Usando $y_p'' - 4y_p' + 3y_p = 9x^2 - 36x + 37$, se obtiene:

$$2A - 4(2Ax + B) + 3(Ax^2 + Bx + C) = 9x^2 - 36x + 37.$$

Asociando términos con respecto a las potencias de $x$,

$$(3A)x^2 + (-8A + 3B)x + (2A - 4B + 3C) = 9x^2 - 36x + 37.$$

Hemos obtenido dos polinomios, los que serán iguales cuando así lo sean los coeficientes de los términos del mismo grado, por esto:

$$\begin{cases} 3A = 9 & \text{(coeficientes de } x^2\text{);} \\ -8A + 3B = -36 & \text{(coeficientes de } x^1\text{);} \\ 2A - 4B + 3C = 37 & \text{(coeficientes de } x^0\text{, términos constantes).} \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones que tiene por solución:

$$A = 3; \quad B = -4 \quad \& \quad C = 5.$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = 3x^2 - 4x + 5.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = y_p(x) + y_c(x) = 3x^2 - 4x + 5 + c_1e^x + c_2e^{3x}.$$

□

**Ejemplo 4.6.6** *Resolver la ED lineal no homogénea*

$$y'' + 4y' = 12x^2 - 10x - 16,$$

*por el método de coeficientes indeterminados.*

▼ Obtenemos primero la solución general de la ED lineal homogénea asociada

$$y'' + 4y' = 0.$$

Proponiendo $y = e^{rx}$, se obtiene la ecuación característica

$$r^2 + 4r = 0,$$

que tiene por soluciones a $r = 0 \quad \& \quad r = -4$, ambas de multiplicidad uno.
Por lo anterior la solución complementaria de la ED dada es

$$y_c(x) = c_1e^{0x} + c_2e^{-4x} = c_1 + c_2e^{-4x}.$$

Como segundo paso obtenemos una solución particular $y_p$ de la ED lineal:

$$y'' + 4y' = 12x^2 - 10x - 16.$$

Observe que la función $g(x) = 12x^2 - 10x - 16$ es un polinomio de grado 2.
Es decir: $g(x) = P_2(x) = P_2(x)e^0 = P_2(x)e^{0x}$, donde se tiene el factor $e^{rx}$, con $r = 0$.
Como $r = 0$ es una raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico $(r^2 + 4r)$, entonces se propone como solución particular:

$$y_p(x) = x^1(Ax^2 + Bx + C) = x(Ax^2 + Bx + C),$$

donde $A$, $B$ y $C$ son coeficientes que deben ser determinados. Ahora,

$$y_p = Ax^3 + Bx^2 + Cx \;\Rightarrow\; y_p' = 3Ax^2 + 2Bx + C \;\Rightarrow\; y_p'' = 6Ax + 2B.$$

Al utilizar $y_p'' + 4y_p' = 12x^2 - 10x - 16$, se obtiene:

$$(6Ax + 2B) + 4(3Ax^2 + 2Bx + C) = 12x^2 - 10x - 16.$$

Asociando términos con respecto a las potencias de $x$:

$$(12A)x^2 + (6A + 8B)x + (2B + 4C) = 12x^2 - 10x - 16.$$

Hemos hallado dos polinomios y los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales, por esto:

$$\begin{cases} 12A = 12 & \text{(coeficientes de } x^2\text{);} \\ 6A + 8B = -10 & \text{(coeficientes de } x^1\text{);} \\ 2B + 4C = -16 & \text{(coeficientes de } x^0\text{, términos constantes).} \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones que tiene por solución:

$$A = 1; \quad B = -2 \quad \& \quad C = -3.$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = x^3 - 2x^2 - 3x.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y = y_p(x) + y_c(x) = x^3 - 2x^2 - 3x + c_1 + c_2e^{-4x}.$$

□

**Ejemplo 4.6.7** *Obtener la solución general de la ED*

$$y''' + 3y'' = -36x^2 + 12x + 42,$$

*por el método de coeficientes indeterminados.*

▼ Primero se obtiene la solución complementaria proponiendo $y = e^{rx}$.

$$y''' + 3y'' = 0 \Rightarrow r^3 + 3r^2 = 0 \Rightarrow r^2(r + 3) = 0.$$

Esta ecuación característica tiene por solución $r = 0$, raíz de multiplicidad 2 y $r = -3$, raíz de multiplicidad 1. Por lo tanto, la solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1e^{0x} + c_2xe^{0x} + c_3e^{-3x} = c_1 + c_2x + c_3e^{-3x}.$$

En segundo lugar, se obtiene una solución particular $y_p$ de la ED lineal

$$y''' + 3y'' = -36x^2 + 12x + 42.$$

Esto es, la función $g(x) = -36x^2 + 12x + 42$ es un polinomio de grado 2.
Es decir: $g(x) = P_2(x) = P_2(x)e^0 = P_2(x)e^{0x}$, donde se tiene el factor $e^{rx}$, con $r = 0$.
Como $r = 0$ es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio característico $(r^3 + 3r^2)$, entonces se propone como solución particular:

$$y_p(x) = x^2(Ax^2 + Bx + C) = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2,$$

donde $A$, $B$ y $C$ son coeficientes que deben ser determinados. Ahora,

$$y_p = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 \Rightarrow y_p' = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow y_p'' = 12Ax^2 + 6Bx + 2C \Rightarrow y_p''' = 24Ax + 6B.$$

Si usamos $y_p''' + 3y_p'' = -36x^2 + 12x + 42$, hallamos que

$$(24Ax + 6B) + 3(12Ax^2 + 6Bx + 2C) = -36x^2 + 12x + 42.$$

Asociando términos con respecto a las mismas potencias de $x$:

$$(36A)x^2 + (24A + 18B)x + (6B + 6C) = -36x^2 + 12x + 42.$$

Hemos obtenido dos polinomios, los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales, por esto:

$$\begin{cases} 36A = -36 & \text{(coeficientes de } x^2\text{);} \\ 24A + 18B = 12 & \text{(coeficientes de } x^1\text{);} \\ 6B + 6C = 42 & \text{(coeficientes de } x^0\text{, términos constantes).} \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones que tiene por solución:

$$A = -1; \quad B = 2 \quad \& \quad C = 5.$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y = y_p(x) + y_c(x) = -x^4 + 2x^3 + 5x^2 + c_1 + c_2x + c_3e^{-3x}.$$

□

**Ejemplo 4.6.8** *Resolver la ED* $y'' + y = (5x - 1)e^{2x}$, *por el método de coeficientes indeterminados.*

▼ Se obtiene primero la solución complementaria proponiendo $y = e^{rx}$:

$$y'' + y = 0 \Rightarrow r^2 + 1 = 0 \Rightarrow r^2 = -1 \Rightarrow r = \pm\sqrt{-1} = \pm i.$$

Las soluciones de la ecuación característica son $r = i$ & $r = -i$, ambas de multiplicidad 1.
La solución complementaria es

$$y_c(x) = e^{0x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Obtenemos ahora una solución particular $y_p$ de la ED lineal

$$y'' + y = (5x - 1)e^{2x}.$$

La función $g(x) = (5x - 1)e^{2x}$ es el producto de un polinomio de grado uno, por la exponencial $e^{2x}$.
Es decir: $g(x) = P_1(x)e^{2x} = P_1(x)e^{rx}$, con $r = 2$.
Como $r = 2$ no es raíz del polinomio característico $(r^2 + 1)$, entonces se propone como solución particular:

$$y_p(x) = x^0(Ax + B)e^{2x} = (Ax + B)e^{2x},$$

donde $A$ y $B$ son coeficientes aún por determinar. Y ahora:

$$y_p = (Ax + B)e^{2x} \Rightarrow y_p' = (2Ax + 2B + A)e^{2x} \Rightarrow y_p'' = (4Ax + 4B + 4A)e^{2x}.$$

Utilizando $y_p'' + y_p = (5x - 1)e^{2x}$, se obtiene:

$$\begin{aligned} (4Ax + 4B + 4A)e^{2x} + (Ax + B)e^{2x} = (5x - 1)e^{2x} \Rightarrow \\ \Rightarrow (4Ax + 4B + 4A) + (Ax + B) = (5x - 1) \Rightarrow \\ \Rightarrow (5A)x + (5B + 4A) = 5x - 1. \end{aligned}$$

Logramos así dos polinomios y los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales, por esto:

$$\begin{cases} 5A = 5 & \text{(coeficientes de } x^1\text{);} \\ 5B + 4A = -1 & \text{(coeficientes de } x^0\text{, términos constantes).} \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones que tiene por solución:

$$A = 1 \quad \& \quad B = -1.$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = (x - 1)e^{2x}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y = y_p(x) + y_c(x) = (x - 1)e^{2x} + c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

□

**Ejemplo 4.6.9** *Obtener la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' - 5y' + 4y = (12x - 5)e^{4x},$$

*por el método de coeficientes indeterminados.*

▼ Obtenemos primero la solución general de la homogénea asociada:

$$y'' - 5y' + 4y = 0.$$

Proponiendo $y = e^{rx}$, se obtiene la ecuación característica:

$$r^2 - 5r + 4 = 0,$$

que tiene por soluciones a $r = 1 \quad \& \quad r = 4$, ambas de multiplicidad 1.
Por lo tanto, la solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1 e^x + c_2 e^{4x}.$$

Logramos una solución particular $y_p$ para la ED lineal:

$$y'' - 5y' + 4y = (12x - 5)e^{4x}.$$

Observe que la función $g(x) = (12x - 5)e^{4x}$ es el producto de un polinomio de grado uno, por la exponencial $e^{4x}$.
Es decir: $g(x) = P_1(x)e^{4x} = P_1(x)e^{rx}$, con $r = 4$.
Como $r = 4$ es una raíz de multiplicidad 1 del polinomio característico $(r^2 - 5r + 4)$, entonces se propone como solución particular:

$$y_p(x) = x^1(Ax + B)e^{4x} = x(Ax + B)e^{4x},$$

con $A$ y $B$ coeficientes que hemos de determinar; y ahora:

$$\begin{aligned} y_p = (Ax^2 + Bx)e^{4x} \ &\Rightarrow y_p' = 4(Ax^2 + Bx)e^{4x} + (2Ax + B)e^{4x} \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_p'' = 16(Ax^2 + Bx)e^{4x} + 8(2Ax + B)e^{4x} + (2A)e^{4x}. \end{aligned}$$

Usaremos:

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = (12x - 5)e^{4x};$$

eliminando $e^{4x}$, simplificando y asociando términos con respecto a las potencias de $x$:

$$(6A)x + (2A + 3B) = 12x - 5.$$

Hemos obtenido dos polinomios y los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales, por esto:

$$\begin{cases} 6A = 12 & \text{(coeficientes de } x^1\text{);} \\ 2A + 3B = -5 & \text{(coeficientes de } x^0\text{, términos constantes).} \end{cases}$$

Lo anterior es un sistema de ecuaciones que tiene por solución:

$$A = 2 \quad \& \quad B = -3.$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = (2x^2 - 3x)e^{4x} = x(2x - 3)e^{4x}.$$

Por lo tanto, la solución general es

$$y = y_p(x) + y_c(x) = (2x^2 - 3x)e^{4x} + c_1e^x + c_2e^{4x}.$$

□

**Ejemplo 4.6.10** *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' - 4y' + 4y = 2(9x - 2)e^{2x},$$

*por el método de coeficientes indeterminados.*

▼ Primero se obtiene la solución complementaria proponiendo $y = e^{rx}$:

$$y'' - 4y' + 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r + 4 = 0 \Rightarrow (r - 2)^2 = 0.$$

Esta ecuación característica tiene por solución a $r = 2$, que es de multiplicidad 2.
Por lo tanto, la solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} = (c_1 + c_2x)e^{2x}.$$

Obtenemos ahora una solución particular $y_p(x)$ para la ED lineal

$$y'' - 4y' + 4y = (18x - 4)e^{2x}.$$

Observamos que la función $g(x) = (18x - 4)e^{2x}$ es el producto de un polinomio de grado uno, por la exponencial $e^{2x}$.
Es decir: $g(x) = P_1(x)e^{2x} = P_1(x)e^{rx}$, con $r = 2$.
Como $r = 2$ es una raíz de multiplicidad 2 del polinomio característico $(r^2 - 4r + 4)$, entonces se propone como solución particular:

$$y_p(x) = x^2(Ax + B)e^{2x} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x},$$

con $A$ y $B$ coeficientes que vamos a determinar:

$$\begin{aligned} y_p = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x} &\Rightarrow y_p' = 2(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} + (3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow y_p'' = 4(Ax^3 + Bx^2)e^{2x} + 4(3Ax^2 + 2Bx)e^{2x} + (6Ax + 2B)e^{2x}. \end{aligned}$$

Utilizando $y_p'' - 4y_p' + 4y_p = (18x - 4)e^{2x}$, eliminando $e^{2x}$, simplificando y asociando términos con respecto a las potencias de $x$:

$$(6A)x + (2B) = 18x - 4.$$

Hemos obtenido dos polinomios, los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales, por esto:

$$\begin{cases} 6A = 18 & \text{(coeficientes de } x^1\text{)} \\ 2B = -4 & \text{(coeficientes de } x^0\text{, términos constantes)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3; \\ B = -2. \end{cases}$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = x^2(3x-2)e^{2x} = (3x^3 - 2x^2)e^{2x}.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y = y_p(x) + y_c(x) = (3x^3 - 2x^2)e^{2x} + (c_1 + c_2x)e^{2x} = (3x^3 - 2x^2 + c_2x + c_1)e^{2x}.$$

□

**Ejemplo 4.6.11** *Obtener la solución general de la ED*

$$y'' + 2y' + 5y = 19\,\text{sen}\,2x + 8\cos 2x,$$

*por el método de coeficientes indeterminados.*

▼ Obtenemos primero la solución complementaria proponiendo $y = e^{rx}$:

$$y'' + 2y' + 5y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 + 2r + 5 = 0 \;\Rightarrow\; r = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; r = -1 \pm 2i\,.$$

Las raíces del polinomio característico son $r_1 = -1 + 2i$ & $r_2 = -1 - 2i$, ambas de multiplicidad 1. Por lo tanto, la solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1e^{-x}\cos 2x + c_2e^{-x}\,\text{sen}\,2x = e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\,\text{sen}\,2x).$$

Determinamos a continuación una solución particular $y_p(x)$ para la ED lineal

$$y'' + 2y' + 5y = 19\,\text{sen}\,2x + 8\cos 2x.$$

Aquí, la función $g(x) = 19\,\text{sen}\,2x + 8\cos 2x$ es una combinación lineal de $\text{sen}\,2x$ & $\cos 2x$, la cual es una función relacionada con los números complejos $r = 0 \pm 2i$, que no son raíces del polinomio característico. Por esta razón se propone como solución particular:

$$y_p(x) = A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x,$$

donde $A$ y $B$ son constantes que debemos determinar. Ahora,

$$y_p = A\,\text{sen}\,2x + B\cos 2x \;\Rightarrow\; y_p' = 2A\cos 2x - 2B\,\text{sen}\,2x \;\Rightarrow\; y_p'' = -4A\,\text{sen}\,2x - 4B\cos 2x.$$

Al usar $y_p'' + 2y_p' + 5y_p = 19\,\text{sen}\,2x + 8\cos 2x$:

$$\begin{array}{ccc} -4A\,\text{sen}\,2x & - & 4B\cos 2x \\ -4B\,\text{sen}\,2x & + & 4A\cos 2x \\ 5A\,\text{sen}\,2x & + & 5B\cos 2x \\ \hline (A-4B)\,\text{sen}\,2x & + & (4A+B)\cos 2x \end{array} = 19\,\text{sen}\,2x + 8\cos 2x.$$

Hemos obtenido dos combinaciones lineales de las funciones $\text{sen}\,2x$ y $\cos 2x$ que, como hemos observado anteriormente, son funciones linealmente independientes. Por lo tanto estas combinaciones lineales son iguales cuando sus coeficientes correspondientes son iguales, por esto:

$$\begin{cases} A - 4B = 19 & \text{(coeficientes de sen}\,2x) \\ 4A + B = 8 & \text{(coeficientes de cos}\,2x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A - 4B = 19 \\ 16A + 4B = 32 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 17A = 51 \\ B = 8 - 4A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3; \\ B = -4. \end{cases}$$

Entonces la solución particular es

$$y_p(x) = 3\,\text{sen}\,2x - 4\cos 2x.$$

Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y = y_p(x) + y_c(x) = 3\,\text{sen}\,2x - 4\cos 2x + e^{-x}(c_1\cos 2x + c_2\,\text{sen}\,2x).$$

□

**Ejemplo 4.6.12** *Resolver la ecuación diferencial*

$$y'' + 9y = 12\cos 3x,$$

*por el método de coeficientes indeterminados.*

▼ Se obtiene primero la solución complementaria proponiendo $y = e^{rx}$:

$$y'' + 9y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 + 9 = 0 \;\Rightarrow\; r = \pm 3i = 0 \pm 3i.$$

Las raíces del polinomio característico son $r = 0 \pm 3i$, ambas de multiplicidad 1.
La solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1 e^{0x}\cos 3x + c_2 e^{0x}\operatorname{sen} 3x = c_1\cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x.$$

A continuación obtenemos una solución particular $y_p(x)$ para la ED lineal:

$$y'' + 9y = 12\cos 3x.$$

Aquí, la función $g(x) = 12\cos 3x = 0\operatorname{sen} 3x + 12\cos 3x$ es una combinación lineal de $\operatorname{sen} 3x$ & $\cos 3x$, la cual es una función relacionada con los números complejos $r = 0 \pm 3i$, que son raíces del polinomio característico de multiplicidad 1. Por esta razón se propone como solución particular:

$$y_p(x) = x^1(A\operatorname{sen} 3x + B\cos 3x) = Ax\operatorname{sen} 3x + Bx\cos 3x.$$

Por lo que:

$$y_p' = (-3Bx + A)\operatorname{sen} 3x + (3Ax + B)\cos 3x \quad \& \quad y_p'' = (-9Ax - 6B)\operatorname{sen} 3x + (-9Bx + 6A)\cos 3x.$$

Al usar $y_p'' + 9y_p = 12\cos 3x$:

$$-6B\operatorname{sen} 3x + 6A\cos 3x = 12\cos 3x.$$

Igualdad que se cumple cuando $A = 2$ y $B = 0$.
Entonces, la solución particular es $y_p(x) = 2x\operatorname{sen} 3x$. Por lo tanto, la solución general de la ED es

$$y = y_p(x) + y_c(x) = 2x\operatorname{sen} 3x + c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x.$$

□

**Ejemplo 4.6.13** *Obtener la solución general de la ecuación diferencial*

$$y'' - 2y' + 5y = -20e^x\operatorname{sen} 2x,$$

*por el método de coeficientes indeterminados.*

▼ Obtenemos primero la solución complementaria proponiendo $y = e^{rx}$:

$$y'' - 2y' + 5y = 0 \;\Rightarrow\; r^2 - 2r + 5 = 0 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; r = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i.$$

Las raíces del polinomio característico son $r = 1 \pm 2i$, ambas de multiplicidad 1.
La solución complementaria es

$$y_c(x) = c_1 e^{x}\cos 2x + c_2 e^{x}\operatorname{sen} 2x = e^x(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x).$$

Obtenemos ahora una solución particular $y_p(x)$ para la lineal

$$y'' - 2y' + 5y = -20e^x\operatorname{sen} 2x.$$

La función $g(x) = -20e^{x}\operatorname{sen}2x = -20e^{x}\operatorname{sen}2x + 0e^{x}\cos 2x$ es una combinación lineal de $e^{x}\operatorname{sen}2x$ & $e^{x}\cos 2x$, la cual es una función relacionada con los números complejos $r = 1 \pm 2i$, que son raíces del polinomio característico de multiplicidad 1. Por esta razón se propone como solución particular:

$$y_p(x) = x^1(Ae^{x}\operatorname{sen}2x + Be^{x}\cos 2x) = Axe^{x}\operatorname{sen}2x + Bxe^{x}\cos 2x.$$

Por lo que:

$$y_p' = (Ax - 2Bx + A)e^{x}\operatorname{sen}2x + (2Ax + Bx + B)e^{x}\cos 2x;$$
$$y_p'' = (-3Ax - 4Bx + 2A - 4B)e^{x}\operatorname{sen}2x + (4Ax - 3Bx + 4A + 2B)e^{x}\cos 2x.$$

Si tenemos en cuenta la ecuación diferencial $y_p'' - 2y_p' + 5y_p = -20e^{x}\operatorname{sen}2x$, entonces:

$$(-4B)e^{x}\operatorname{sen}2x + (4A)e^{x}\cos 2x = -20e^{x}\operatorname{sen}2x.$$

Que se cumple cuando

$$\begin{cases} -4B = -20 \\ 4A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 5; \\ A = 0. \end{cases}$$

Hallamos que la solución particular es $y_p(x) = 5xe^{x}\cos 2x$. Por lo tanto, la solución general de la ecuación diferencial es

$$y = y_p(x) + y_c(x) = 5xe^{x}\cos 2x + e^{x}(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen}2x).$$

□

**Principio de superposición**

Muchas ED son, por ejemplo:

$$L[y] = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_m(x), \tag{4.1}$$

donde

$$L[y] = a_n y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y$$

y donde $g_1(x), g_2(x), \cdots, g_m(x)$ son funciones arbitrarias.
En estos casos, pueden hallarse soluciones particulares para cada ecuación diferencial:

$$L[y_{p_j}] = g_j(x); \quad j = 1, 2, \cdots, m.$$

Una vez hallada la correspondiente solución particular $y_{p_j}$, $j = 1, 2, \cdots, m$, puede demostrarse que la suma de todas ellas

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_m}$$

constituye una solución particular de (**??**).
A este procedimiento se le conoce como principio de superposición.
A continuación presentamos algunas ED que requieren del principio de superposición.

1. $y'' + 4y = 2x^2 + 1 + e^{x}\cos x$.

   Aquí, $g_1(x) = 2x^2 + 1$ & $g_2(x) = e^{x}\cos x$.

2. $y'' - 4y' + y = 3xe^{2x} + \operatorname{sen}x$.

   Aquí, $g_1(x) = 3xe^{2x}$ & $g_2(x) = \operatorname{sen}x$.

3. $y''' - 2y'' + 4y' = x^2 + x\operatorname{sen}x + (2x - 2)\cos x$.

   Aquí, $g_1(x) = x^2$ & $g_2(x) = x\operatorname{sen}x + (2x - 2)\cos x$.

4. $y''' - y' = \operatorname{sen}x - 2\cos 2x$.

   Ahora, el hecho de que las funciones trigonométricas tengan diferente argumento nos obliga a considerar por separado $g_1(x) = \operatorname{sen}x$ & $g_2(x) = -2\cos 2x$.

**Ejercicios 4.6.1** *Método de coeficientes indeterminados.* *Soluciones en la página* **??**
*Por el método de coeficientes indeterminados, encontrar una solución particular y escribir la solución general de cada ecuación diferencial.*

1. $y'' - y' - 2y = -2x^3 + x^2 + 4x + 1$ .
2. $y'' - y' - 2y = 16xe^{3x}$ .
3. $y'' - 5y' + 6y = 10 \operatorname{sen} 2x - 50 \cos 2x$ .
4. $y'' + 4y = (5x^2 + 4x - 3)e^x$ .
5. $4y'' - 4y' + y = (-3x + 4) \operatorname{sen} x - 2(2x - 1) \cos x$ .
6. $y'' + y' = 3$ .
7. $y'' + 4y' + 4y = 2(x + 3)$ .
8. $y'' - y' - 12y = e^{4x}$ .
9. $y'' + 25y = 6 \operatorname{sen} x$ .
10. $y'' - 2y' + 5y = e^x \operatorname{sen} x$ .
11. $y'' - y = x^2e^x$ .
12. $y'' + 25y = 20 \operatorname{sen} 5x + x \cos x$ .
13. $y'' - y' = (3x^2 + 6x + 1)e^x$ .
14. $y'' - 2y' - 8y = 2 \operatorname{sen} x + (12x - 10)e^{4x}$ .
15. $y'' - 4y' + 4y = (18x - 4)e^{2x}$ .
16. $y'' + 12y' + 100y = 48 \operatorname{sen} 10t$ .
17. $y'' - 5y' + 6y = 2 \operatorname{sen} 2x - \cos 2x + (3 - 2x)e^{2x}$ .

**Ejercicios 4.6.1** *Método de coeficientes indeterminados.* *Página* **??**

1. $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4 + c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$.
2. $y = (4x - 5)e^{3x} + c_1 e^{-x} + c_2 e^{2x}$.
3. $y = 5 \operatorname{sen} 2x + c_1 e^{2x} + c_2 e^{3x}$.
4. $y = (x^2 - 1)e^x + c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x$.
5. $y = x \operatorname{sen} x + 2\cos x + (c_1 + c_2 x)e^{\frac{x}{2}}$.
6. $y = 3x + c_1 + c_2 e^{-x}$.
7. $y = \frac{x}{2} + 1 + (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$.
8. $y = \frac{x}{7}e^{4x} + c_1 e^{-3x} + c_2 e^{4x}$.
9. $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} x + c_1 \operatorname{sen} 5x + c_2 \cos 5x$.
10. $y = \frac{1}{3}e^x \operatorname{sen} x + (c_1 \operatorname{sen} 2x + c_2 \cos 2x)e^x$.
11. $y = \left(\frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{4}\right)e^x + c_1 e^{-x} + c_2 e^x$.
12. $y = -2x\cos 5x + \frac{x}{24}\cos x + \frac{1}{288}\operatorname{sen} x + c_1 \operatorname{sen} 5x +$ $+ c_2 \cos 5x$.
13. $y = x(x^2 + 1)e^x + c_1 + c_2 e^x$.
14. $y = -\frac{18}{85}\operatorname{sen} x + \frac{4}{85}\cos x + (x^2 - 2x)e^{4x} + c_1 e^{-2x} +$ $+ c_2 e^{4x}$.
15. $y = (3x^3 - 2x^2 + c_1 x + c_2)e^{2x}$.
16. $y = -\frac{2}{5}\cos 10t + e^{-6t}(c_1 \cos 8t + c_2 \operatorname{sen} 8t)$.
17. $y = \frac{7}{52}\operatorname{sen} 2x + \frac{9}{52}\cos 2x + (x^2 - x)e^{2x} + c_1 e^{2x} +$ $c_2 e^{3x}$.