CAPÍTULO

4

Ecuaciones diferenciales de orden superior

4.3 Ecuaciones diferenciales lineales de orden n

En esta sección presentaremos un método general para resolver ED lineales de orden n cuya forma es

$$a_n(x)y^{(n)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x). \tag{4.1}$$

Estas ecuaciones se caracterizan por las dos propiedades siguientes:

1. La variable dependiente y así como sus derivadas tienen exponente igual a 1, o bien 0, exclusivamente.

2. Los coeficientes $a_n(x), \ldots, a_1(x), a_0(x)$ y la función $g(x)$ son funciones que sólo dependen de x, o son constantes. Es decir, no dependen de la variable dependiente y.

Cabe mencionar que no existen métodos, ni generales ni sencillos que permitan resolver ecuaciones diferenciales no lineales de orden n. ¿Qué hace la diferencia?; la respuesta es simple: poder usar o no el bagaje del álgebra lineal. Ésta es una rama muy útil de las matemáticas donde encontramos las definiciones, conceptos y resultados que nos permitirán resolver el problema general. Así, nuestro estudio pasará obligadamente por algunas de las ideas más importantes de este tema que se presentan a continuación.

4.3.1 Espacio vectorial

Un espacio vectorial consta de un conjunto V, cuyos elementos denotados por $\vec{v}$ se llaman vectores, y de dos operaciones: adición vectorial y multiplicación por escalar, que satisfacen a un conjunto de axiomas. No entraremos en el detalle de todos ellos porque, para nosotros, dos axiomas importantes son los siguientes:

1. Existe un vector en V al que se le llama vector cero y se escribe como $\vec{0}$ tal que $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}$ para todo $\vec{v} \in V$.

2. Dados los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V$ y los escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} \in V$.

   A esto se le llama cerradura bajo la adición y multiplicación por escalares.

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

Los vectores a los que nos hemos referido, así como las operaciones de adición y multiplicación por escalar pueden ser muy diversos, sin embargo, nos limitaremos a los casos habituales en nuestro tratamiento.

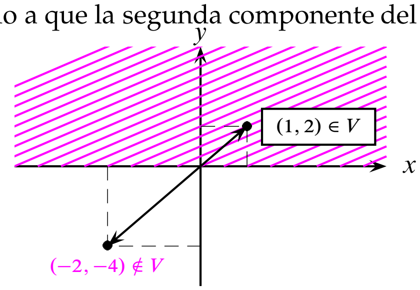
Ejemplo 4.3.1 *Si* $V = \mathbb{R}^2 = \left\{ (a, b) \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ *y si definimos las operaciones de adición y multiplicación por escalar de la siguiente manera:*

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad y \quad \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b),$$

obtenemos que V*, junto con las operaciones indicadas, es un espacio vectorial.*

Ejemplo 4.3.2 *Si* $V = \left\{ (a, b) \,\middle|\, a \in \mathbb{R}, b \geq 0 \right\}$ *y si adoptamos las operaciones del ejemplo (4.3.1), entonces* V *no es un espacio vectorial.*

▼ En efecto, si tomamos $\vec{v} = (1, 2) \in V$ y el escalar $\alpha = -2$, por ejemplo, resulta que $\alpha\vec{v} = -2(1, 2) = (-2, -4) \notin V$ debido a que la segunda componente del vector es negativa.



□

Deseamos resaltar lo siguiente:

1. El concepto de espacio vectorial nos permite dotar a un conjunto con operaciones que producen resultados que nuevamente satisfacen a las condiciones que definen al conjunto.
2. Si V es un espacio vectorial (con las operaciones de adición y multiplicación por escalar), al vector $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ se le llama combinación lineal de los vectores $\vec{u}$ & $\vec{v}$.

Ejemplo 4.3.3 *El conjunto de las funciones derivables es un espacio vectorial.*

4.3.2 Independencia lineal

Un vector contiene información. El concepto de independencia lineal nos dirá en cierto sentido si un vector aporta o no información adicional a la ya considerada por un conjunto de vectores. Precisamos:

- Sea V un espacio vectorial y sean $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ vectores del mismo. Diremos que estos vectores son linealmente independientes si

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0} \tag{4.2}$$

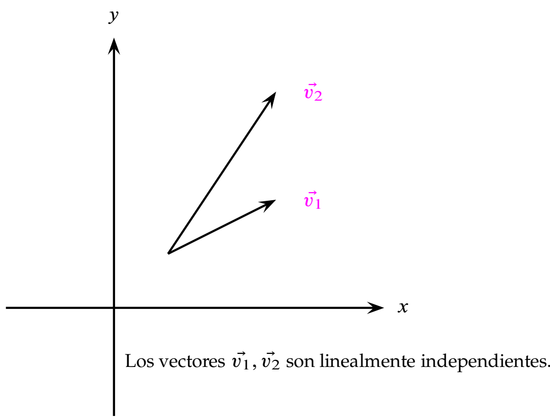
  solamente se cumple cuando $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

- En caso contrario diremos que el conjunto de vectores $\left\{ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \right\}$ es linealmente dependiente.

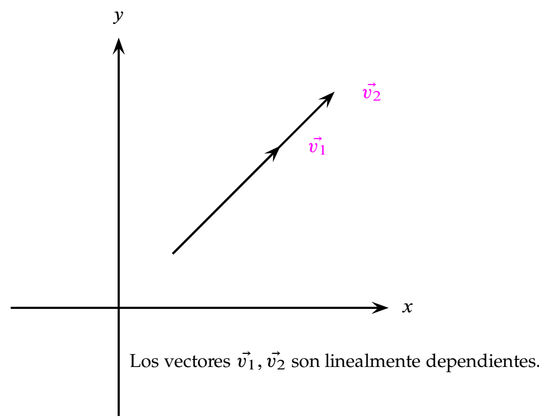
Supongamos que el conjunto $\left\{ \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \right\}$ es linealmente dependiente. Esto significa que la ecuación (4.2) se cumple para al menos un $c_i \neq 0$.
Si suponemos que $c_1 \neq 0$. Entonces, de (4.2), hallamos lo siguiente:

$$c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{v}_1 = -\frac{c_2}{c_1}\vec{v}_2 - \cdots - \frac{c_n}{c_1}\vec{v}_n.$$

Lo que significa que la información del vector $\vec{v}_1$ se puede obtener de una combinación lineal del resto de los vectores, en otras palabras: la información de $\vec{v}_1$ no aporta información adicional a la que ya se conocía por medio del resto de vectores. Esto significa que podemos prescindir de este vector.
Los conceptos de independencia y dependencia lineal tienen una interpretación gráfica interesante que podemos visualizar en el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$:



Los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son linealmente independientes.



Los vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ son linealmente dependientes.

Ls ideas anteriores pueden y deben ser extendidas al espacio vectorial de las funciones. Esto lo usaremos en nuestro estudio de las ecuaciones diferenciales. Concretamente:

- Una colección de funciones $f_1, \dots, f_n$ definidas en un intervalo J se dice que es linealmente independiente si:

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0, \text{ para toda } x \in J \ \Rightarrow \ c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0.$$

- Si la combinación lineal anterior se cumple para al menos un $c_i \neq 0$, diremos que la colección es linealmente dependiente.

Para el caso particular de dos funciones, la definición anterior equivale a lo siguiente:

- $\{ f_1, f_2 \}$ es un conjunto linealmente dependiente de funciones, si y sólo si $\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = c$, para toda $x \in J$ y alguna constante c.

Ejemplo 4.3.4 *Las funciones* $f_1(x) = e^x \cos 2x$; $f_2(x) = e^x \operatorname{sen} 2x$ *conforman un conjunto linealmente independiente de funciones.*

▼ La razón es muy simple:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{e^x \cos 2x}{e^x \operatorname{sen} 2x} = \cot 2x \quad \text{no es una constante.}$$

Entonces:

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \neq c, \ \text{para } c \text{ constante.}$$

□

Ejemplo 4.3.5 *Determine si el conjunto* $\{ f_1(x) = \operatorname{arcsen} x, f_2(x) = \arccos x, f_3(x) = 1 \}$ *es linealmente independiente o bien linealmente dependiente.*

▼ Como $\operatorname{arcsen} x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, entonces:

$$\operatorname{arcsen} x = \frac{\pi}{2}(1) + (-1)\arccos x \ \Rightarrow \ f_1(x) = \frac{\pi}{2} f_3(x) + (-1) f_2(x),$$

deducimos que la información de la función $f_1(x) = \operatorname{arcsen} x$ puede recuperarse (vía una combinación lineal) de las otras dos funciones $f_2(x) = \arccos x$ & $f_3(x) = 1$.
En consecuencia, el conjunto $\{ f_1(x) = \operatorname{arcsen} x, f_2(x) = \arccos x, f_3(x) = 1 \}$ es linealmente dependiente.

□

- Sean $\{ f_1, f_2 \}$ soluciones de la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

con $a_1(x)$ & $a_0(x)$ funciones continuas en un intervalo J. Entonces, tenemos dos casos:

1. Si $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$ para algún $x \in J$, entonces el conjunto $\{ f_1(x), f_2(x) \}$ es linealmente independiente.

2. Si $\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = 0$ para algún $x \in J$, entonces el conjunto $\{ f_1(x), f_2(x) \}$ es linealmente dependiente.

▼ En efecto, puesto que f_1 & f_2 son soluciones de la ED, tenemos que

$$\begin{aligned} f_1'' + a_1(x) f_1' + a_0(x) f_1 &= 0; \\ f_2'' + a_1(x) f_2' + a_0(x) f_2 &= 0. \end{aligned}$$

Si multiplicamos la primera de las ecuaciones anteriores por $f_2(x)$, la segunda por $f_1(x)$ y restamos la primera de la segunda, hallamos:

$$\left.\begin{aligned} f_2 f_1'' + a_1(x) f_2 f_1' + a_0(x) f_1 f_2 = 0 \\ f_1 f_2'' + a_1(x) f_1 f_2' + a_0(x) f_1 f_2 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_1 f_2'' - f_2 f_1'' + a_1(x)[f_1 f_2' - f_2 f_1'] = 0. \tag{4.3}$$

Deseamos resaltar la expresión $f_1 f_2' - f_2 f_1'$. Su estudio se atribuye al matemático polaco Hoëne Wronski. Si la expresamos por medio de $W(x) = W(f_1, f_2)(x)$, observamos que

$$W(f_1, f_2)(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_2 f_1',$$

y además que

$$W' = \frac{d}{dx}(f_1 f_2' - f_2 f_1') = (f_1 f_2'' + f_1' f_2') - (f_2 f_1'' + f_2' f_1') = f_1 f_2'' - f_2 f_1''.$$

Por lo que la ecuación (4.3) se expresa como

$$W'(x) + a_1(x)W(x) = 0,$$

que es un ED de variables separables:

$$\frac{dW}{dx} = -a_1(x)W \Rightarrow \frac{dW}{W} = -a_1(x)\, dx.$$

Por lo tanto, al integrar:

$$\ln W = \int -a_1(x)\, dx + C,$$

deducimos que

$$W = e^{-\int a_1(x)\, dx + C}.$$

Así obtenemos como solución:

$$W(x) = Ce^{-\int a_1(x) dx}.$$

Y como la función exponencial nunca se anula, tenemos que

1. Si $C \neq 0$, entonces $W(x) \neq 0$, para toda $x \in J$.
2. Si $C = 0$, entonces $W(x) = 0$, para toda $x \in J$.

Ahora, si consideramos la combinación lineal

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 = 0 \Rightarrow c_1 f_1' + c_2 f_2' = 0,$$

tenemos el sistema

$$\begin{cases} c_1 f_1 + c_2 f_2 & = & 0 \\ c_1 f_1' + c_2 f_2' & = & 0 \quad \text{(donde } c_1 \text{ \& } c_2 \text{ son las incógnitas);} \end{cases}$$

deducimos que, en caso de que $W(x) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} \neq 0$, para alguna $x \in J$, la solución del sistema será únicamente la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$, de lo cual se desprende que el conjunto $\{ f_1(x), f_2(x) \}$ es linealmente independiente; mientras que, si $W(x) = 0$, se puede garantizar una solución no trivial para c_1 y para c_2, por lo cual $\{ f_1(x), f_2(x) \}$ resultará un conjunto linealmente dependiente.

□

Ejemplo 4.3.6 *Las funciones* $f_1(x) = x \quad \& \quad f_2(x) = x^2$, *con* $x \neq 0$, *son soluciones de la ED lineal*

$$x^2 y'' - 2xy' + 2y;$$

además son linealmente independientes.

▼ En efecto:

$$f_1 = x \Rightarrow f_1' = 1 \Rightarrow f_1'' = 0.$$
$$f_2 = x^2 \Rightarrow f_2' = 2x \Rightarrow f_2'' = 2.$$

Luego entonces:

$$x^2 f_1'' - 2x f_1' + 2f_1 = x^2(0) - 2x(1) + 2(x) = 0.$$
$$x^2 f_2'' - 2x f_2' + 2f_2 = x^2(2) - 2x(2x) + 2(x^2) = 0.$$

Esto es, $f_1(x) = x \quad \& \quad f_2(x) = x^2$ son soluciones de la ED. Además:

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_1' f_2 = (x)(2x) - (1)(x^2) = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0.$$

Por lo tanto, $f_1(x) = x \quad \& \quad f_2(x) = x^2$ son soluciones linealmente independientes. La solución general de la ED es

$$y = c_1 f_1 + c_2 f_2 = c_1 x + c_2 x^2.$$

□

Ejemplo 4.3.7 *Las funciones* $f_1(x) = 3xe^{-2x} \quad \& \quad f_2(x) = -5xe^{-2x}$, *con* $x \neq 0$, *son soluciones de la ED lineal*

$$y'' + 4y' + 4y = 0,$$

además son linealmente dependientes.

▼ En efecto:

$$f_1 = 3xe^{-2x} \Rightarrow f_1' = (-6x + 3)e^{-2x} \Rightarrow f_1'' = (12x - 12)e^{-2x}.$$
$$f_2 = -5xe^{-2x} \Rightarrow f_2' = (10x - 5)e^{-2x} \Rightarrow f_2'' = (-20x + 20)e^{-2x}.$$

Luego entonces:

$$f_1'' + 4f_1' + 4f_1 = [(12x - 12) + 4(-6x + 3) + 4(3x)]e^{-2x} = (0)e^{-2x} = 0.$$
$$f_2'' + 4f_2' + 4f_2 = [(-20x + 20) + 4(10x - 5) + 4(-5x)]e^{-2x} = (0)e^{-2x} = 0.$$

Además:

$$W(f_1, f_2) = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 \\ f_1' & f_2' \end{vmatrix} = f_1 f_2' - f_1' f_2 = (3xe^{-2x})(10x - 5)e^{-2x} - (-6x + 3)e^{-2x}(-5xe^{-2x}) =$$
$$= (30x^2 - 15x - 30x^2 + 15x)e^{-4x} = (0)e^{-4x} = 0.$$

Por lo tanto, $f_1(x) = 3xe^{-2x} \quad \& \quad f_2(x) = -5xe^{-2x}$ son soluciones linealmente dependientes.

□

4.3.3 Bases de un espacio vectorial

- Sean $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, n vectores de un espacio vectorial V. Diremos que el conjunto $\{\, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \,\}$ constituye una base del espacio vectorial si se cumplen las siguientes condiciones:

  1. El conjunto $\{\, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \,\}$ es un conjunto linealmente independiente, en otras palabras, ningún vector del conjunto puede obtenerse de los demás vectores a través de una combinación lineal.
  2. El conjunto $\{\, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \,\}$ genera el espacio vectorial, es decir, todo vector $\vec{w}$ del espacio vectorial puede ser expresado mediante una combinación lineal de los vectores $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$, es decir:

  $$\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \cdots + c_n\vec{v}_n, \text{ para cualquier } \vec{w} \in V.$$

- Todas las bases del espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores. A este número común se le conoce como dimensión del espacio vectorial. La dimensión del espacio vectorial que se está considerando es n.

Nosotros trabajaremos, de manera general, con espacios vectoriales que puedan ser descritos por sólo un número finito de vectores, esto es, espacios vectoriales de dimensión finita.

Ejemplo 4.3.8 *Consideremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ con las operaciones de adición y multiplicación por escalar usuales. Examinar en cada caso si los vectores son linealmente independientes o bien linealmente dependientes. Decidir también si generan el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$:*

1. $\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1)$.
2. $\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 1, 0)$ & $\vec{v}_4 = (1, 1, 1)$.
3. $\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 1, 0)$.

▼

1. Los vectores $\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1)$ son linealmente independientes (un argumento a favor de nuestra afirmación es que uno no es múltiplo del otro). Sin embargo, no generan el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$. Por ejemplo, el vector $\vec{w} = (1, 1, 1)$ no puede ser escrito como una combinación lineal de $\vec{v}_1$ & $\vec{v}_2$. En efecto, si w fuera una combinación lineal de $\vec{v}_1$ & $\vec{v}_2$, obtendríamos:

$$\begin{aligned} &\vec{w} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 \;\Rightarrow\; (1,1,1) = c_1(1,0,1) + c_2(0,1,1) \;\Rightarrow \\ &\;\Rightarrow\; (1,1,1) = (c_1, 0, c_1) + (0, c_2, c_2) \;\Rightarrow\; (1,1,1) = (c_1, c_2, c_1 + c_2) \;\Rightarrow \\ &\;\Rightarrow\; c_1 = 1, c_2 = 1, c_1 + c_2 = 1 \;\Rightarrow\; 2 = 1, \text{ imposible.} \end{aligned}$$

2. Los vectores $\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 1, 0)$ & $\vec{v}_4 = (1, 1, 1)$ no forman una base del espacio vectorial. En este caso, $\{\, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_4 \,\}$ es un conjunto linealmente dependiente:

$$\vec{v}_4 = \frac{1}{2}\vec{v}_1 + \frac{1}{2}\vec{v}_2 + \frac{1}{2}\vec{v}_3.$$

3. Puede verificarse que los vectores $\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \vec{v}_2 = (0, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, 1, 0)$ conforman una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, por lo que su dimensión es 3.

□

4.3.4 Ecuaciones diferenciales de orden n

Aplicaremos los aspectos teóricos anteriores a la discusión de nuestro interés principal: las ecuaciones diferenciales lineales. Centraremos nuestra presentación para ED de orden $n = 2$, no sin antes señalar que todo lo que desarrollaremos será igualmente válido para el caso general de cualquier orden n. Consideraremos la ecuación diferencial

$$A_2(x)y'' + A_1(x)y' + A_0(x)y = Q(x), \tag{4.4}$$

en un intervalo J en el cual $A_2(x) \neq 0$ para toda $x \in J$. De esta manera, podemos dividir (4.4) entre $A_2(x)$ para obtener una ecuación normalizada de la forma:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x). \tag{4.5}$$

De aquí en adelante supondremos que $a_1(x), a_0(x)$ & $q(x)$ son continuas en un intervalo J que es el conjunto más grande posible donde todas ellas son continuas. Por ejemplo, la ecuación diferencial lineal

$$y'' - x^2y' + y = \ln x,$$

tiene como intervalo J al intervalo $(0, \infty)$. Es en ese intervalo donde buscaremos la solución de la ED.

Al igual que para las ED de primer orden, es conveniente tener un resultado que garantice que una ED como las que estamos considerando posea soluciones y que provea condiciones bajo las cuales un PVI tiene solución única. Para ese efecto, enunciamos el siguiente resultado fundamental:

Teorema 4.1 *de Existencia y Unicidad*
Supongamos que $a_1(x)$, $a_0(x)$, $q(x)$ son funciones continuas en el intervalo J. Entonces la ED:

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x), \tag{4.6}$$

tiene solución definida en el intervalo J. Más aún para un punto $x_0 \in J$ fijo y números reales y_0, y_1 proporcionados, el PVI formado por la ED (4.6), *con*

$$y(x_0) = y_0 \quad \& \quad y'(x_0) = y_1,$$

presenta una única solución.

- La ED lineal (4.5), con $q(x) \neq 0$, para algún $x \in J$, se dice que es no homogénea.

  La ED lineal (4.5), con $q(x) = 0$, para toda $x \in J$, se dice que es homogénea. Es la ED homogénea asociada a la ED no homogénea anterior.

Consideremos la ED lineal homogénea asociada a (4.6):

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{4.7}$$

Sea V el conjunto de soluciones de (4.7).
Advierta que la función $y = 0$ satisface a la ecuación (4.7), es decir, la función $y = 0 \in V$.
Ahora, si y_1 & y_2 están en V, entonces:

$$y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1 = 0 \quad \& \quad y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2 = 0.$$

Si tomamos una combinación lineal de estas dos soluciones, hallamos que

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \;\Rightarrow\; y' = c_1y_1' + c_2y_2' \quad \& \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= c_1y_1'' + c_2y_2'' + a_1(x)[c_1y_1' + c_2y_2'] + a_0(x)[c_1y_1 + c_2y_2] = \\ &= c_1[y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1] + c_2[y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2] = \\ &= c_1[0] + c_2[0] = 0. \end{aligned}$$

Esto significa que V es un espacio vectorial y, por lo tanto, es posible aplicar la teoría que hemos discutido previamente sobre el tema. Particularmente nos interesa determinar la dimensión de este espacio vectorial

para saber el número de funciones que se requieren para describirlo, es decir, escribir cualquier solución de (4.7) mediante una combinación lineal de algunas soluciones (suponiendo que el espacio resulta de dimensión finita).
Sea $\hat{y}$ una solución de (4.7) que satisfaga las condiciones:

$$y(x_0) = a \quad \& \quad y'(x_0) = b. \tag{4.8}$$

Sabemos ya que $c_1y_1 + c_2y_2$ es solución general de (4.7), pero nos preguntamos si podremos encontrar valores únicos de las constantes c_1 & c_2 tales que la expresión $c_1y_1 + c_2y_2$ satisfaga las condiciones (4.8), es decir, tales que

$$\begin{cases} c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) = a; \\ c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0) = b. \end{cases}$$

Esto será cierto si $\begin{vmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{vmatrix} = W(y_1, y_2)(x_0) \neq 0$. Ésta es precisamente la condición para independencia lineal. Luego, concluimos que, si el conjunto $\{\, y_1, y_2 \,\}$ es linealmente independiente, podremos satisfacer con la combinación lineal $c_1y_1 + c_2y_2$ las condiciones (4.8). Como consecuencia del teorema de Existencia y Unicidad enunciado anteriormente, concluimos que

$$\hat{y} = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Esto significa que $\{\, y_1, y_2 \,\}$ constituye una base del espacio de soluciones de la ecuación diferencial lo que nos permitirá expresar cualquier solución en términos de y_1 & y_2.
Resumimos nuestras ideas en el siguiente teorema.

- Sea V el conjunto de todas las funciones que son solución de la ecuación diferencial:

  $$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

  1. Entonces V es un espacio vectorial.
  2. Si y_1 & y_2 son soluciones linealmente independientes, entonces $\{\, y_1, y_2 \,\}$ constituye una base de V por lo cual todo elemento de V, es decir, cualquier solución de la ecuación diferencial puede ser escrita como una combinación lineal de y_1 & y_2; en símbolos, para cualquier

     $$y \in V \;\Rightarrow\; y = c_1y_1 + c_2y_2.$$

  3. La afirmación anterior establece que la dimensión de V es 2 y que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es la solución general de la ED lineal homogénea.
  4. Al conjunto $\{\, y_1, y_2 \,\}$ se le llama conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial lineal homogénea.

Ejemplo 4.3.9 *Verifique que las funciones $y_1 = e^x\cos 2x$, $y_2 = e^x \operatorname{sen} 2x$ forman un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial $y''-2y'+5y = 0$. Después forme la solución general de la ED y, posteriormente, halle la solución particular que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.*

▼ En primer lugar verificaremos que y_1 & y_2 son soluciones de la ecuación diferencial; como la verificación es similar, sólo probaremos nuestra afirmación para y_1. Tenemos:

$$y_1 = e^x\cos 2x \;\Rightarrow\; y_1' = -2e^x \operatorname{sen} 2x + e^x\cos 2x \;\&\; y_1'' = -3e^x\cos 2x - 4e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial, hallamos:

$$\begin{aligned} &-3e^x\cos 2x - 4e^x \operatorname{sen} 2x - 2[-2e^x \operatorname{sen} 2x + e^x\cos 2x] + 5[e^x\cos 2x] = \\ &= -3e^x\cancel{\cos 2x} - 4e^x\cancel{\operatorname{sen} 2x} + 4e^x\cancel{\operatorname{sen} 2x} - 2e^x\cancel{\cos 2x} + 5e^x\cancel{\cos 2x} = 0, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que $y_1 = e^x\cos 2x$ es solución de la ED.

En segundo lugar, requerimos mostrar que el conjunto $\{ y_1, y_2 \}$ es un conjunto linealmente independiente. Para ello, tenemos dos estrategias, la primera consiste en determinar la naturaleza del cociente y_1/y_2:

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{e^x \cos 2x}{e^x \operatorname{sen} 2x} = \cot 2x \neq c.$$

De esto se deduce que $\{ y_1, y_2 \}$ es un conjunto linealmente independiente y, en consecuencia, un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación diferencial.
Sin embargo, con el propósito de ilustrar lo que discutimos sobre el wronskiano, mostraremos la independencia lineal de las funciones por medio de este concepto; para ello, consideramos:

$$\begin{aligned} W(x) &= \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} e^x \cos 2x & e^x \operatorname{sen} 2x \\ -2e^x \operatorname{sen} 2x + e^x \cos 2x & 2e^x \cos 2x + e^x \operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Ahora bien, dado que y_1 & y_2 son soluciones de la ED, su wronskiano se anula idénticamente o bien es diferente de cero para todo $x \in \mathbb{R}$; en consecuencia, no requerimos hacer el cálculo del anterior determinante para todo x: bastará tomar un valor particular; por ejemplo, si $x = 0$:

$$W(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

De este resultado concluimos que el conjunto de soluciones $\{ y_1, y_2 \}$ es linealmente independiente, y en consecuencia podemos decir que éste es un conjunto fundamental de soluciones para la ED. Así, con base en lo discutido en la teoría preliminar, la solución general de la ED está expresada por:

$$y(x) = c_1 e^x \cos 2x + c_2 e^x \operatorname{sen} 2x.$$

Finalmente, para hallar la solución particular consideramos las condiciones iniciales.
En primer lugar tenemos:

$$y(0) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 e^0 \cos(0) + c_2 e^0 \operatorname{sen}(0) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 = 0.$$

De esta forma, la solución se reduce a $y(x) = c_2 e^x \operatorname{sen} 2x$. Ahora, de $y'(0) = 1$ deducimos que

$$\begin{aligned} & y'(x) = c_2 \left(2e^x \cos 2x + e^x \operatorname{sen} 2x\right) \;\&\; y'(0) = 1 \;\Rightarrow \\ & \Rightarrow\; 1 = c_2 \left(2e^0 \cos 0 + e^0 \operatorname{sen} 0\right) = 2c_2 \;\Rightarrow\; c_2 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Concluimos que la solución buscada es $y(x) = \dfrac{1}{2} e^x \operatorname{sen} 2x$.

□

Para cerrar esta sección, discutiremos un resultado asociado al teorema anterior.

- Suponiendo que y_p sea una solución conocida de la ED lineal no homogénea

  $$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = q(x), \tag{4.9}$$

  que $\overline{y}$ sea cualquier solución de (4.9) y que $\{ y_1, y_2 \}$ sea así mismo un conjunto fundamental de soluciones de la ED lineal homogénea

  $$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0,$$

  se puede afirmar que cualquier solución de la ED (4.9) puede ser escrita en la forma:

  $$\overline{y} = y_p + c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

▼ Nuestra primera observación es que $\overline{y} - y_p$ es una solución de la ED homogénea asociada; en efecto:

$$
\begin{aligned}
&(\overline{y} - y_p)'' + a_1(x)(\overline{y} - y_p)' + a_0(x)(\overline{y} - y_p) = \\
&= (\overline{y}'' + a_1(x)\overline{y}' + a_0(x)\overline{y}) - (y_p'' + a_1(x)y_p' + a_0(x)y_p) = \\
&= q(x) - q(x) = 0.
\end{aligned}
$$

Ahora, ya que $\overline{y} - y_p$ es una solución de la ED homogénea asociada, ésta puede ser escrita como una combinación lineal de y_1 & y_2, esto es:

$$\overline{y} - y_p = c_1 y_1 + c_2 y_2.$$

Es decir:

$$\overline{y} = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_p.$$

En conclusión, toda solución de (4.9) puede ser escrita como la suma de la solución general de la ED homogénea asociada y una solución conocida y_p de (4.9). Denominamos solución particular de (4.9) a la solución conocida y_p.

□

Ejercicios 4.3.1 *Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.* *Soluciones en la página 12*

1. Mostrar que tanto $\{ y_1 = e^x, y_2 = e^{-x} \}$ como $\{ y_3 = \operatorname{senh} x, y_4 = \cosh x \}$ son conjuntos fundamentales de soluciones para la ecuación diferencial $y'' - y = 0$.
2. a. Verificar que $y_1 = x^2$ & $y_2 = x^{-1}$ son soluciones de la ecuación diferencial $x^2 y'' - 2y = 0$. ¿La combinación lineal $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es solución de la ecuación?
   b. Verificar que $y_1 = 1$ & $y_2 = x^{\frac{1}{2}}$ son soluciones de la ecuación diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$. ¿La combinación lineal $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ es solución de la ecuación (en general)?
   c. Si hay alguna diferencia entre a. y b., ¿en qué radica esta diferencia?
3. a. Sea $y_1(x)$ una solución de la ecuación diferencial $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$. ¿Es $y_2(x) = c y_1(x)$ solución de la ecuación diferencial?
   b. Si V representa el conjunto de todas las soluciones de la anterior ecuación diferencial, ¿es V un espacio vectorial?
4. Calcular el wronskiano de cada uno de los siguientes pares de funciones:
   a. $y_1 = \operatorname{sen} x$ & $y_2 = \cos x$.
   b. $y_1 = e^{-2x} \operatorname{sen} x$ & $y_2 = e^{-2x} \cos x$.
   c. $y_1 = \operatorname{senh} 3x$ & $y_2 = 4(e^{3x} - e^{-3x})$.
   d. $y_1 = x \operatorname{sen} 2x$ & $y_2 = \operatorname{sen} 2x$.
5. a. Extender la definición de wronskiano para el caso de tres funciones.
   b. Calcular el wronskiano de cada una de las siguientes ternas de funciones:
      i. $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$ & $y_3 = x^2 e^x$.
      ii. $y_1 = \cos x$, $y_2 = \operatorname{sen} x$ & $y_3 = 1$.
      iii. $y_1 = \cos x + \operatorname{sen} x$, $y_2 = \cos x - \operatorname{sen} x$ & $y_3 = \cos x$.

En cada uno de los siguientes ejercicios, verificar que el conjunto dado es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación proporcionada; después encontrar la solución particular que satisface las condiciones iniciales dadas.

6. $y'' + y' - 2y = 0$; $\left\{ y_1 = e^{x}, y_2 = e^{-2x} \right\}$, con $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.
7. $y'' + 4y = 0$; $\{ y_1 = \cos 2x, y_2 = \operatorname{sen} 2x \}$, con $y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.
8. $y''' - 2y'' + 5y' = 0$; $\{ y_1 = 1, y_2 = e^{x}\cos 2x, y_3 = e^{x}\operatorname{sen} 2x \}$, con $y(0) = 0,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$.
9. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$; $\left\{ y_1 = x^2, y_2 = x^{-3} \right\}$, con $y(2) = 1,\ y'(2) = 0$.
10. $xy'' + y' = 0$; $\{ y_1 = 1, y_2 = \ln x \}$, con $y(1) = 2,\ y'(1) = 3$.
11. Determinar la dependencia o independencia lineal de cada uno de los siguientes conjuntos de funciones:
    a. $\{ e^{x}, e^{-x}, 2 \}$.
    b. $\{ \operatorname{arcsen} x, \arccos x, \pi \}$.
    c. $\left\{ e^{4x}, e^{-4x}, \cosh 4x \right\}$.
    d. $\left\{ e^{x}\cos 2x, e^{x}\operatorname{sen} 2x, e^{-4x} \right\}$.
12. Suponga que y_1 sea una solución no nula de la ecuación $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$.
    a. Verifique que, si y_2 es una segunda solución tal que $\{ y_1, y_2 \}$ sea linealmente independiente, entonces $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right) = \dfrac{W(y_1, y_2)}{y_1^2}$.
    b. Verifique que $y_1 = x$ sea una solución de $x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$; use a. para determinar la solución general de la ecuación diferencial.
13. a. Muestre que $y_1 = 3x^2 - 1$ satisface a la ecuación $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ y tiene un mínimo en $x = 0$.
    b. Verifique ahora que cualquier otra solución y_2 no podrá tener mínimo en $x = 0$, si $\{ y_1, y_2 \}$ es linealmente independiente .
14. Demuestre que $y = x^3$ es una solución de $yy'' = 6x^4$, pero que, si $c^2 \neq 1$, entonces $y = cx^3$ no es una solución de la ecuación diferencial. ¿Por qué este hecho no contradice la teoría discutida en esta sección?
15. Compruebe que $y_1 = 1$ & $y_2 = x^{\frac{1}{2}}$ son soluciones de $yy'' + (y')^2 = 0$, pero que la suma $y = y_1 + y_2$ no es solución. ¿Por qué este hecho no contradice la teoría discutida en esta sección?
16. a. Determine si el conjunto de funciones $\left\{ y_1 = \operatorname{sen} x^2, y_2 = \cos x^2 \right\}$ es linealmente dependiente o independiente.
    b. Calcule $W(y_1, y_2)(0)$.
    c. ¿Existe una ecuación de la forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ (en la que p & q sean funciones continuas) tal que y_1 & y_2 sean soluciones de la ecuación diferencial?

En los siguientes ejercicios se proporciona una ecuación diferencial no homogénea, una solución particular, condiciones iniciales y un conjunto fundamental de soluciones para la ecuación diferencial homogénea asociada. En cada caso encuentre la solución particular del PVI.

17. $y'' + y = 3x$; $y_p = 3x$, con $y(0) = 2,\ y'(0) = -2$; $\{ \cos x, \operatorname{sen} x \}$.
18. $y'' - 2y' - 3y = 6$; $y_p = -2$, con $y(0) = 3,\ y'(0) = 11$; $\left\{ e^{-x}, e^{3x} \right\}$.
19. $y'' - 4y = \operatorname{senh} x$; $y_p = -\dfrac{1}{3}\operatorname{senh} x$, con $y(0) = 0,\ y'(0) = 1$; $\left\{ e^{2x}, e^{-2x} \right\}$.

Ejercicios 4.3.1 *Ecuaciones diferenciales lineales de orden n.* *Página 10*

1. Demostrar.
2. a. Sí;
   b. no;
   c. en la linealidad; la ED en a. es lineal, en b. no lo es.
3. No, para ambas preguntas.
4. a. -1;
   b. $-e^{-4x}$;
   c. 0;
   d. $-\text{sen}^2 2x$.
5. a. $W(y_1, y_2, y_3)(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1'' & y_2'' & y_3'' \end{vmatrix}$.
   b. i. $2e^{3x}$;
      ii. 1;
      iii. 0.
6. $y = \frac{2}{3}e^{x} + \frac{1}{3}e^{-2x}$.
7. $y = \cos 2x + 2\,\text{sen}\,2x$.
8. $y = \frac{1}{5}[-3 + 3e^{x}\cos 2x + e^{x}\,\text{sen}\,2x]$.
9. $y = \frac{3}{20}x^{2} + \frac{16}{5}x^{-3}$.
10. $y = 2 + 3\ln x$.
11. a. Linealmente independiente.
    b. Linealmente dependiente.
    c. Linealmente dependiente.
    d. Linealmente independiente.
12. a. Verificar.
    b. $y = c_1 x + c_2 x^{-2}$.
13. a. Demostrar.
    b. Verificar.
14. Porque la ED no es lineal.
15. Porque la ED no es lineal.
16. a. El conjunto es linealmente independiente;
    b. $W(y_1, y_2) = 0$;
    c. no.
17. $y = 2\cos x - 5\,\text{sen}\,x + 3x$.
18. $y = e^{-x} + 4e^{3x} - 2$.
19. $y = \frac{2}{3}\,\text{senh}\,2x - \frac{1}{3}\,\text{senh}\,x$.