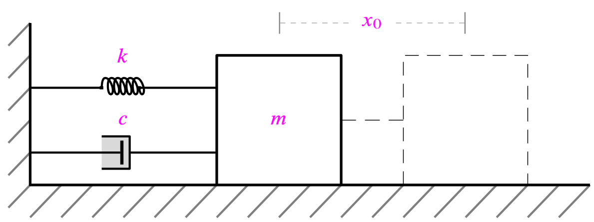
CAPÍTULO

5

Aplicaciones de ED de segundo orden

5.2.2 Vibraciones amortiguadas libres

Continuando el desarrollo del estudio de las vibraciones, supongamos que se agrega ahora un dispositivo mecánico (amortiguador) al sistema masa-resorte que tiene el efecto de reducir la velocidad de la masa cuando el sistema se encuentra vibrando (véase la figura a continuación).



El amortiguador ejerce una fuerza dependiente de la velocidad de la masa; entre mayor sea la velocidad, mayor es la fuerza que ejerce. Por simplicidad supondremos que esta fuerza en magnitud es proporcional a la rapidez, es decir: $|F_A| = c\,|v(t)|$, donde $c > 0$ es la constante de proporcionalidad.
Entonces, la fuerza que ejerce el amortiguador es

$$F_A = -cv(t) = -c\frac{dx}{dt},$$

donde el signo negativo indica que la fuerza de amortiguación va en sentido contrario a la velocidad del cuerpo. La fuerza total ejercida sobre la masa es, entonces:

$$F = F_R + F_A = -kx - c\frac{dx}{dt}, \text{ donde } F_R \text{ es la fuerza del resorte,}$$

lo que se puede escribir como:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0 \quad \text{o bien como} \quad mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0. \tag{5.1}$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

La ecuación (5.1) modela el movimiento amortiguado de la masa. En este caso, la fuerza de amortiguación produce una pérdida de energía en el sistema masa-resorte, pues ahora no se satisface la ecuación de conservación de la energía (**??**) en la página (**??**). Es de notar que todos los parámetros del modelo (m, c y k) son cantidades positivas. La misma ecuación diferencial modela al sistema masa-resorte colocado verticalmente.
La ecuación característica de la ecuación diferencial es

$$mr^2 + cr + k = 0.$$

Las dos soluciones de esta ecuación cuadrática son

$$r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad \& \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}. \tag{5.2}$$

El signo del radicando $c^2 - 4mk$ determina el tipo de movimiento del sistema. Tenemos tres posibilidades: que el radicando en cuestión sea positivo, negativo o cero. Analizemos a continuación cada uno de estos casos.

Movimiento sobreamortiguado $c^2 - 4mk > 0$, es decir $c > \sqrt{4mk}$

En el caso $c^2 - 4mk > 0$ las dos raíces que aparecen en (5.2) son diferentes y ambas son negativas, esto implica directamente que la solución de la ED lineal homogénea es

$$x(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}, \quad \text{con} \quad r_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m} \quad \& \quad r_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}. \tag{5.3}$$

Las dos funciones exponenciales que aparecen en (5.3) son decrecientes, en consecuencia, no se espera vibración alguna y el sistema tiende rápidamente a regresar a su posición de equilibrio, por esa razón decimos que el movimiento es sobreamortiguado. La forma explícita del movimiento depende de las condiciones iniciales, que además sirven para determinar las constantes c_1, c_2.
Por ejemplo, consideremos el caso de un sistema masa-resorte-amortiguador con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $v(0) = 0$. La primera condición $x(0) = x_0$ se obtiene evaluando la expresión (5.3) en el tiempo $t = 0$. Así obtenemos:

$$x_0 = x(0) = c_1 + c_2. \tag{5.4}$$

Derivando la ecuación (5.3), obtenemos:

$$v(t) = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}.$$

Evaluando en $t = 0$, obtenemos la segunda ecuación a considerar, es decir,

$$0 = v(0) = c_1 r_1 + c_2 r_2. \tag{5.5}$$

El sistema de ecuaciones lineales (5.4) y (5.5) para c_1, c_2 se puede resolver de diferentes formas; en este caso, si seleccionamos la regla de Cramer, obtenemos:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} x_0 & 1 \\ 0 & r_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{x_0 r_2}{r_2 - r_1}; \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 \\ r_1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix}} = \frac{-x_0 r_1}{r_2 - r_1}.$$

Finalmente, sustituyendo en (5.3) obtenemos la siguiente expresión para la posición

$$x(t) = \left(\frac{x_0 r_2}{r_2 - r_1}\right) e^{r_1 t} - \left(\frac{x_0 r_1}{r_2 - r_1}\right) e^{r_2 t} = \left(\frac{x_0}{r_2 - r_1}\right) (r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}). \tag{5.6}$$

De la ecuación (5.2), tenemos que

$$r_2 - r_1 = \frac{-\sqrt{c^2 - 4mk}}{m}.$$

Esto nos permite simplificar la ecuación (5.6) de forma que

$$x(t) = \frac{-x_0 m}{\sqrt{c^2 - 4mk}}(r_2 e^{r_1 t} - r_1 e^{r_2 t}) = \frac{x_0 m}{\sqrt{c^2 - 4mk}}(r_1 e^{r_2 t} - r_2 e^{r_1 t}).$$

Ejemplo 5.2.1 *Considere un sistema masa-resorte-amortiguador con las constantes siguientes:*

$$c = 5\ N \cdot s/m;\ m = 2\ kg;\ k = 2\ N/m;\ x_0 = 1\ m;\ v_0 = 0\ m/s.$$

Resuelva la ecuación diferencial y grafique la posición en el tiempo.

▼ En este caso la ecuación diferencial por resolver es

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 2x = 0,$$

cuya ecuación característica es

$$2r^2 + 5r + 2 = 0.$$

Como las dos raíces de esta ecuación cuadrática son

$$r_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 4(2)(2)}}{2(2)} = \begin{cases} -2; \\ -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-\frac{1}{2}t}.$$

Para determinar las constantes, necesitamos calcular la velocidad y utilizar las condiciones iniciales. La velocidad se obtiene derivando la posición y está dada por

$$v(t) = -2c_1 e^{-2t} - \frac{1}{2}c_2 e^{-\frac{t}{2}}.$$

Si ahora utilizamos las condiciones iniciales $x_0 = 1$ & $v_0 = 0$, obtenemos el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 + c_2; \\ 0 &= -2c_1 - \frac{1}{2}c_2. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación se tiene $c_2 = -4c_1$. Sustituyendo en la primera resulta $c_1 = -\dfrac{1}{3}$. Finalmente $c_2 = \dfrac{4}{3}$. Así se obtiene que la posición en todo tiempo está dada por la expresión

$$x(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\ \text{m},$$

de donde es posible determinar tanto la velocidad como la aceleración, derivando una y dos veces:

$$v(t) = \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\ \text{m/s} \quad \& \quad a(t) = -\frac{4}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{2}}\ \text{m/s}^2.$$

Algunas observaciones interesantes son las siguientes:

1. ¿Pasa m por la posición de equilibrio? Para responder la pregunta encontremos, si existe, el tiempo en el que $x(t) = 0$:

$$\begin{aligned} x(t) = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{3}e^{-2t} \;\Rightarrow\; \\ \Rightarrow\; 4e^{-\frac{t}{2}}e^{2t} = 1 \;\Rightarrow\; e^{\frac{3}{2}t} = \frac{1}{4} \;\Rightarrow\; \frac{3}{2}t = \ln\left(\frac{1}{4}\right) \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; t = \frac{2}{3}(-\ln 4) = -\frac{2}{3}(\ln 4); \quad \text{vemos que } t < 0. \end{aligned}$$

Esto nos indica que no hay $t \geq 0$ para el cual $x(t) = 0$. Entonces, m no pasa por la posición de equilibrio.

2. ¿Hay instantes en que la velocidad de m sea cero? Esto ocurre si $v(t) = 0$:

$$\begin{aligned} v(t) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{3}e^{-2t} = \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}} \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; e^{-2t} = e^{-\frac{t}{2}} \;\Rightarrow\; e^{-2t}e^{\frac{t}{2}} = 1 \;\Rightarrow\; e^{-\frac{3}{2}t} = 1 \;\Rightarrow \\ \Rightarrow\; -\frac{3}{2}t = 0 \;\Rightarrow\; t = 0. \end{aligned}$$

Esto nos indica que $v(t) = 0$ solamente al inicio del movimiento.

Aún más, $v(t) < 0$ cuando $-\frac{3}{2}t < 0$, lo que ocurre cuando $t > 0$. Entonces, en todo instante $t > 0$ sucede que $v(t) < 0$, o sea, $x'(t) < 0$; lo que nos permite afirmar que la posición $x(t)$ decrece al paso del tiempo.

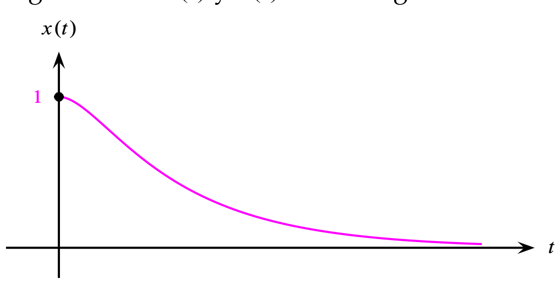
3. ¿Qué ocurre con la posición $x(t)$ y la velocidad $v(t)$ al paso del tiempo?

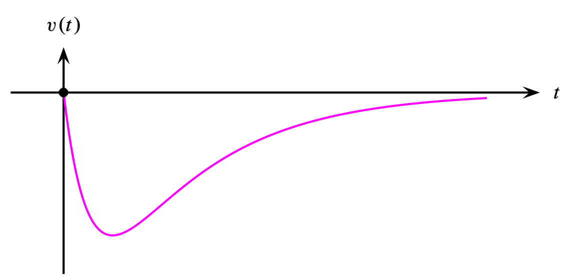
$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-1}{3e^{2t}} + \frac{4}{3e^{\frac{t}{2}}}\right) = \\ = -\frac{1}{3}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e^{2t}}\right) + \frac{4}{3}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\frac{t}{2}}}\right) = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{t\to\infty} v(t) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\right) = \lim_{t\to\infty}\left(\frac{2}{3e^{2t}} - \frac{2}{3e^{\frac{t}{2}}}\right) = \\ = \frac{2}{3}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e^{2t}}\right) - \frac{2}{3}\lim_{t\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\frac{t}{2}}}\right) = 0. \end{aligned}$$

Esto es, al paso del tiempo, la masa m tiende a detenerse en la posición de equilibrio.

4. Las gráficas de $x(t)$ y $v(t)$ son las siguientes:





5. Por otra parte, la energía obtenida con la suma de la energía cinética más la energía potencial está dada por

$$
\begin{aligned}
E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 &= \left(\frac{2}{3}e^{-2t} - \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^{-\frac{t}{2}}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{9}\Big(4e^{-4t} - 8e^{-\frac{5t}{2}} + 4e^{-t} + e^{-4t} - 8e^{-\frac{5t}{2}} + 16e^{-t}\Big) = \\
&= \frac{1}{9}\Big(5e^{-4t} - 16e^{-\frac{5t}{2}} + 20e^{-t}\Big).
\end{aligned}
$$

Claramente, esta energía no permanece constante en el tiempo y se va reduciendo hasta desaparecer. Podemos afirmar que el amortiguador, en efecto, disipa energía del sistema masa-resorte.

□

Ejemplo 5.2.2 *Una masa de 5 kg se une a un resorte de constante $k = 5$ N/m y a un amortiguador de constante $c = 26$ N·s/m. La masa se suelta del punto $x_0 = -0.1$ m, con velocidad $v_0 = 1.94$ m/s; determine:*

1. *La posición, velocidad y aceleración de la masa en el tiempo $t \geq 0$.*
2. *El tiempo en que la masa cruza por la posición de equilibrio y la velocidad en ese instante.*
3. *El tiempo en que la velocidad de la masa es 0 m/s, así como la posición y aceleración en ese instante.*

▼ La posición $x(t)$ de m, con respecto a la posición de equilibrio, está dada por la solución del PVI

$$
5\frac{d^2x}{dt^2} + 26\frac{dx}{dt} + 5x = 0, \quad \text{con} \quad x(0) = -0.1 \quad \& \quad x'(0) = 1.94.
$$

Proponiendo como solución $x = e^{rt}$, obtenemos la ecuación característica

$$
5r^2 + 26r + 5 = 0,
$$

cuyas soluciones son

$$
r_{1,2} = \frac{-26 \pm \sqrt{676 - 4(5)(5)}}{2(5)} = \frac{-26 \pm 24}{10} = \begin{cases} -5; \\ -\dfrac{1}{5}, \end{cases}
$$

de donde inferimos que la posición de la masa es

$$
x(t) = c_1e^{-5t} + c_2e^{-\frac{t}{5}};
$$

y su velocidad está dada por:

$$
v(t) = -5c_1e^{-5t} - \frac{1}{5}c_2e^{-\frac{t}{5}}.
$$

Como en el tiempo $t = 0$ s, se tiene que $x_0 = -0.1$ m, con velocidad $v_0 = 1.94$ m/s, entonces tenemos sustituyendo en las dos ecuaciones previas que

$$
\begin{aligned}
-0.1 &= c_1 + c_2; \\
1.94 &= -5c_1 - 0.2c_2.
\end{aligned}
$$

Para resolver este sistema usamos el método de Cramer:

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} -0.1 & 1 \\ 1.94 & -0.2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -0.2 \end{vmatrix}} = \frac{0.02 - 1.94}{-0.2 + 5} = \frac{-1.92}{4.8} = -0.4;$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -0.1 \\ -5 & 1.94 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -5 & -0.2 \end{vmatrix}} = \frac{1.94 - 0.5}{-0.2 + 5} = \frac{1.44}{4.8} = 0.3.$$

1. Con estos resultados, obtenemos la posición, y derivando la velocidad y la aceleración de la masa en el tiempo $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} x(t) &= -0.4e^{-5t} + 0.3e^{-\frac{t}{5}} \text{ m}; \\ v(t) &= 2e^{-5t} - 0.06e^{-\frac{t}{5}} \text{ m/s}; \\ a(t) &= -10e^{-5t} + 0.012e^{-\frac{t}{5}} \text{ m/s}^2. \end{aligned}$$

2. Observe que la masa cruza por la posición de equilibrio cuando

$$\begin{aligned} x(t) = 0 \ &\Rightarrow 0 = -0.4e^{-5t} + 0.3e^{-\frac{t}{5}} \ \Rightarrow \ 0.4e^{-5t} = 0.3e^{-\frac{t}{5}} \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{0.4}{0.3} = e^{5t - \frac{t}{5}} = e^{\frac{24t}{5}} \ \Rightarrow \ \frac{24t}{5} = \ln\left(\frac{4}{3}\right) \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{5}{24} \ln\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0.0599 \text{ s}. \end{aligned}$$

La velocidad en este tiempo es

$$v(0.0599) = 2e^{-5(0.0599)} - 0.06e^{-\frac{0.0599}{5}} \approx 1.4228 \text{ m/s}.$$

3. La máxima separación de la posición de equilibrio se obtiene cuando la velocidad es cero; esto ocurre cuando

$$\begin{aligned} v(t) = 0 \ &\Rightarrow \ 0 = 2e^{-5t} - 0.06e^{-\frac{t}{5}} \ \Rightarrow \ 2e^{-5t} = 0.06e^{-\frac{t}{5}} \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ \frac{2}{0.06} = e^{\frac{24t}{5}} \ \Rightarrow \ \frac{24t}{5} = \ln\left(\frac{2}{0.06}\right) = \ln\left(\frac{100}{3}\right) \ \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ t = \frac{5}{24} \ln\left(\frac{100}{3}\right) \approx 0.7305 \text{ s}. \end{aligned}$$

En este tiempo, la posición está dada por

$$x(0.7305) = -0.4e^{-5(0.7305)} + 0.3e^{-\frac{0.7305}{5}} \approx 0.2489 \text{ m}.$$

Y la aceleración es

$$a(0.7305) = -10e^{-5(0.7305)} + 0.012e^{-\frac{0.7305}{5}} \approx -0.2489 \text{ m/s}^2.$$

En efecto, como la aceleración es negativa, se tiene un máximo en la posición.

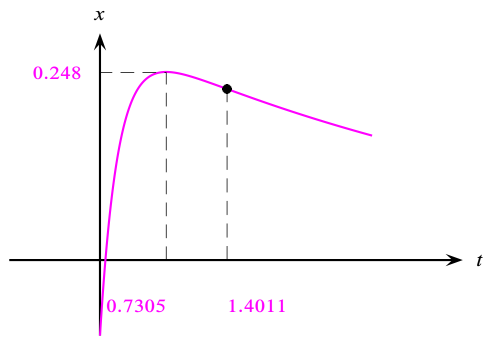
Por otra parte la aceleración se anula cuando

$$0 = -10e^{-5t} + 0.012e^{-\frac{t}{5}} \Rightarrow e^{\frac{24}{5}t} = \frac{10}{0.012} = 833.333 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow t = \frac{5}{24}\ln(833.333) \approx 1.4011 \text{ s}.$$

Antes y después de ese tiempo, el signo de la aceleración es diferente, esto implica que la posición tiene en $t = 1.4011$ un punto de inflexión. La posición en este tiempo es

$$x(1.4011) = -0.4e^{-5(1.4011)} + 0.3e^{-\frac{1.4011}{5}} = 0.2263 \text{ m}.$$

Estos resultados nos permiten construir la gráfica de la posición, que podemos observar en la figura siguiente:



□

Movimiento críticamente amortiguado $c = \sqrt{4mk}$

En este caso las dos raíces de la ecuación característica son iguales a $r = -\dfrac{c}{2m}$, ver (5.2), página 2. La solución de la ecuación diferencial homogénea es

$$x(t) = (c_1 + c_2t)\,e^{r_1t} = (c_1 + c_2t)\,e^{-\frac{c}{2m}t}. \tag{5.7}$$

La función posición contiene un término exponencial decreciente, ahora multiplicado por una función lineal del tiempo. Se espera que la posición decrezca hacia la posición de equilibrio sin vibrar. La manera en que lo haga dependerá de las condiciones iniciales. Esto sucede puesto que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$. Para ver esto aplicaremos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} (c_1 + c_2t)e^{-\frac{c}{2m}t} = \lim_{t\to\infty} \frac{c_1 + c_2t}{e^{\frac{c}{2m}t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{c_2}{\frac{c}{2m}e^{\frac{c}{2m}t}} = 0.$$

Ahora consideremos, por ejemplo, que las condiciones iniciales de un sistema masa-resorte-amortiguador son $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$. Derivando la ecuación (5.7), se obtiene la velocidad.

$$v(t) = c_2e^{-\frac{c}{2m}t} - (c_1 + c_2t)\left(\frac{c}{2m}\right)e^{-\frac{c}{2m}t} = \left[c_2 - \frac{(c_1 + c_2t)\,c}{2m}\right]e^{-\frac{c}{2m}t}. \tag{5.8}$$

Las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ se aplican evaluando en $t = 0$ las ecuaciones (5.7) y (5.8):

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = c_1; \\ v_0 &= v(0) = c_2 - \frac{c_1c}{2m}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$c_1 = x_0 \quad \& \quad c_2 = v_0 + \frac{cx_0}{2m}.$$

Sustituyendo en la ecuación (5.7), obtenemos finalmente que

$$x(t) = \left[x_0 + \left(v_0 + \frac{cx_0}{2m}\right)t\right]e^{-\frac{c}{2m}t}. \tag{5.10}$$

Ejemplo 5.2.3 *Considere un sistema masa-resorte-amortiguador con las constantes siguientes:*

$$c = 4 \text{ N·s/m}; \ m = 2 \text{ kg}; \ k = 2 \text{ N/m}; \ x_0 = 1 \text{ m}; \ v_0 = 0 \text{ m/s}.$$

Encuentre la posición en el tiempo y elabore una grafica de este movimiento.

▼ La ecuación diferencial del movimiento es

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 2x = 0.$$

Cuya ecuación característica es $2r^2 + 4r + 2 = 0$, o sea, $r^2 + 2r + 1 = (r+1)^2 = 0$. Las dos soluciones de esta ecuación son iguales a $r = -1$, de forma que la solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} = (c_1 + c_2t)e^{-t}.$$

Derivando obtenemos la velocidad:

$$v(t) = -c_1e^{-t} + c_2e^{-t} - c_2te^{-t} = (c_2 - c_1)e^{-t} - c_2te^{-t}.$$

Las constantes se determinan utilizando las condiciones iniciales $x(0) = 1$ & $v(0) = 0$. Tenemos en este caso el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(0) = x_0 = 1 &\Rightarrow 1 = c_1; \\ v(0) = v_0 = 0 &\Rightarrow 0 = c_2 - c_1; \end{aligned}$$

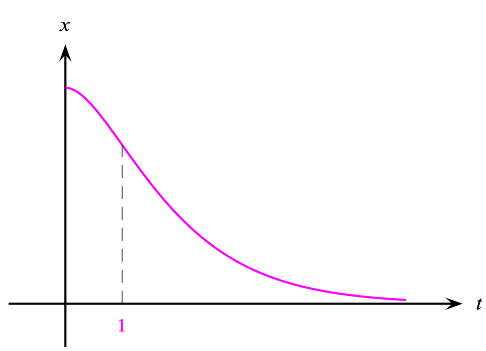
de donde $c_1 = c_2 = 1$. Sustituyendo en las expresiones de posición y velocidad obtenemos:

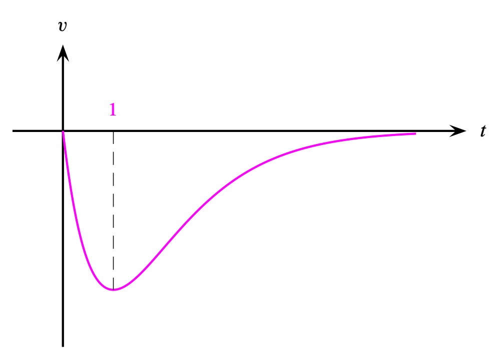
$$x(t) = (1+t)e^{-t} \text{ m}; \quad \& \quad v(t) = -te^{-t} \text{ m/s}.$$

Derivando la velocidad obtenemos la aceleración:

$$a(t) = -e^{-t} + te^{-t} = (t-1)e^{-t} \text{ m/s}^2.$$

Observe que en todo tiempo $t > 0$ la posición es positiva y la velocidad es negativa. Esto significa que la posición es una función decreciente del tiempo. Por otra parte, la aceleración es negativa cuando $0 < t < 1$ y positiva cuando $t > 1$. Esto es, la gráfica de la función posición tiene un punto de inflexión en $t = 1$ y la gráfica de la velocidad tiene un mínimo en $t = 1$. También tenemos que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, por lo tanto, la recta $x = 0$ es una asíntota horizontal de $x(t)$. En las figuras siguientes se muestran las gráficas de la posición y de la velocidad de la masa:





Al inicio del movimiento, la velocidad es cero y posteriormente siempre es negativa, con un valor mínimo en $t = 1$ s, cuando la aceleración se anula; en ese momento la velocidad es $v(1) = -e^{-1} = -0.3679$ m/s. También se observa que $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = 0$.

□

Ejemplo 5.2.4 *Una masa de 8 kg se une a un resorte de constante $k = 2$ N/m y a un amortiguador de constante $c = 8$ N·s/m. Si la masa se suelta del punto $x_0 = -0.1$ m, con velocidad $v_0 = -1.94$ m/s, determine:*

1. *La posición y la velocidad de la masa en el tiempo.*
2. *El tiempo en que la masa cruza por la posición de equilibrio.*
3. *El tiempo en que la velocidad de la masa es 0 m/s.*

▼ La ecuación diferencial que modela este sistema masa-resorte-amortiguador es

$$8\frac{d^2x}{dt^2} + 8\frac{dx}{dt} + 2x = 0.$$

Proponiendo como solución $x = e^{rt}$, obtenemos la ecuación característica:

$$8r^2 + 8r + 2 = 0,$$

cuyas soluciones son

$$r_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4(8)(2)}}{2(8)} = -\frac{1}{2},$$

de donde inferimos que la posición de la masa es

$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\frac{t}{2}},$$

y su velocidad

$$v(t) = c_2 e^{-\frac{t}{2}} - \frac{1}{2}(c_1 + c_2 t)\, e^{-\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}(2c_2 - c_1 - c_2 t)\, e^{-\frac{t}{2}}.$$

Como en el tiempo $t = 0$ s se tiene $x_0 = -0.1$ y velocidad $v_0 = -1.94$, sustituyendo en las dos ecuaciones previas tenemos que

$$-0.1 = c_1;$$
$$-1.94 = \frac{1}{2}(2c_2 - c_1).$$

La solución de este sistema es $c_1 = -0.1 \quad \& \quad c_2 = -1.99$.

1. Con estos resultados hallamos la posición y la velocidad de la masa en el tiempo:

$$x(t) = -(0.1 + 1.99t)\, e^{-\frac{t}{2}} \text{ m} \quad \& \quad v(t) = (-1.94 + 0.995t)\, e^{-\frac{t}{2}} \text{ m/s}.$$

2. En este caso la masa no cruza por la posición de equilibrio ya que $x(t) < 0$ para $t > 0$. Aún más,

$$x(t) = 0 \Rightarrow -(0.1 + 1.99t)e^{-\frac{t}{2}} = 0 \Rightarrow 0.1 + 1.99t = 0 \Rightarrow t = -\frac{0.1}{1.99} \Rightarrow t < 0,$$

lo cual no tiene sentido.

3. Por otra parte, la máxima separación de la posición de equilibrio se obtiene cuando la velocidad es cero, esto ocurre cuando

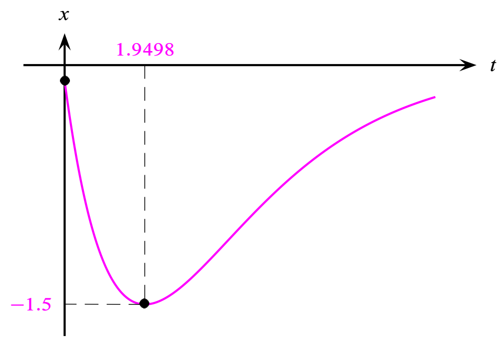
$$v(t) = 0 \Rightarrow 0 = (-1.94 + 0.995t)\, e^{-\frac{t}{2}} \Rightarrow t = \frac{1.94}{0.995} \approx 1.9498 \text{ s}.$$

En este tiempo la posición es

$$x(1.9498) = -[0.1 + 1.99(1.9498)]e^{-\frac{1.9498}{2}} = -1.5014 \text{ m}.$$

Se observa que $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, así que la posición tiende asintóticamente a la recta $x = 0$.

Estos resultados nos permiten esbozar la gráfica de la posición:



□

Ejemplo 5.2.5 *Un sistema masa-resorte-amortiguador está colocado en forma vertical. La masa del cuerpo es de* 0.2 *kg, la constante del resorte es de* 5 *N/m y la constante del amortiguador es de* 2 *N·s/m. Al inicio la masa se libera desde un punto que está* 4 *cm abajo de la posición de equilibrio, con una velocidad hacia abajo de* 0.1 *m/s. Utilice la expresión* (5.10) *para determinar:*

1. *La posición, velocidad y aceleración instantáneas.*
2. *El tiempo en que la masa alcanza su distancia más alejada de la posición de equilibrio.*

▼ Aún cuando el sistema está colocado en forma vertical la ecuación diferencial del movimiento es la misma:

$$mx''(t) + cx'(t) + kx(t) = 0.$$

Por lo tanto, la posición $x(t)$ de m, con respecto a la posición de equilibrio esta dada por la ED

$$0.2\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0,$$

con condiciones iniciales $x(0) = 0.04 \quad \& \quad v(0) = 0.1$.
En este caso tenemos que $m = 0.2, \quad k = 5 \quad \& \, c = 2$; de donde $c^2 - 4mk = 4 - 4(0.2)(5) = 0$; en consecuencia, tenemos un movimiento críticamente amortiguado.

1. Utilizando la ecuación (5.10):

$$x(t) = \left[x_0 + \left(v_0 + \frac{cx_0}{2m}\right)t\right]e^{-\frac{c}{2m}t} = \left[0.04 + \left(0.1 + \frac{0.04}{0.2}\right)t\right]e^{-\frac{t}{0.2}} = (0.04 + 0.3t)\,e^{-5t}.$$

   La velocidad y aceleración instantáneas se obtienen derivando la posición una y dos veces, respectivamente, con respecto al tiempo. Derivando y simplificando hallamos que

$$v(t) = (0.1 - 1.5t)\,e^{-5t} \text{ m/s} \quad \& \quad a(t) = (-2 + 7.5t)\,e^{-5t} \text{ m/s}^2.$$

2. Para determinar el punto más alejado, basta con calcular el tiempo donde la velocidad se anula.

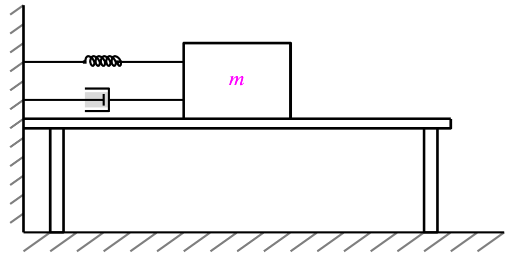
$$v(t) = 0 \Rightarrow (0.1 - 1.5t)e^{-5t} = 0 \Rightarrow 0.1 - 1.5t = 0 \Rightarrow t = \frac{0.1}{1.5} \approx 0.0667\,.$$

   La posición en este instante es

$$x(0.0667) = [0.04 + 0.3(0.0667)]e^{-5(0.0667)} \approx 0.043 \text{ m}.$$

□

Ejemplo 5.2.6 *Considere una masa de 10 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante $k = 40$ N/m y un amortiguador de constante $c = 40$ N·s/m. El sistema se encuentra sobre una mesa horizontal y no existe fricción entre la masa y la mesa. La masa se coloca en una posición $x_0 = 0.03$ m y se suelta con velocidad $v_0 = 0.1$ m/s. Determine la posición de la masa y las energías cinética y potencial en el tiempo t.*



▼ En este caso el modelo que describe el sistema es

$$10x''(t) + 40x'(t) + 40x(t) = 0 \quad \text{o bien} \quad x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0;$$

con las condiciones

$$x_0 = 0.03 \quad \& \quad v_0 = 0.1 .$$

Tenemos un movimiento críticamente amortiguado ya que

$$c^2 - 4mk = (40)^2 - 4(10)(40) = 0.$$

Procedamos a determinar la solución, para ello empezamos con la ecuación característica asociada. Ésta es

$$r^2 + 4r + 4 = 0, \quad \text{o sea,} \quad (r+2)^2 = 0.$$

Las dos raíces de esta ecuación son iguales: $r_{1,2} = -2$, así que la solución de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} = (c_1 + c_2t)e^{-2t}.$$

Derivando tenemos la velocidad

$$v(t) = -2c_1e^{-2t} + c_2e^{-2t} - 2c_2te^{-2t} = (c_2 - 2c_1)\,e^{-2t} - 2c_2te^{-2t}.$$

Aplicando las condiciones iniciales, obtenemos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 0.03 \;\Rightarrow\; 0.03 = c_1; \\ v(0) &= v_0 = 0.1 \;\Rightarrow\; 0.1 = c_2 - 2c_1. \end{aligned}$$

De donde se obtiene: $c_1 = 0.03$; & $c_2 = 0.16$. Finalmente la posición y la velocidad están dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= 0.03e^{-2t} + 0.16te^{-2t} = (0.03 + 0.16t)\,e^{-2t} \text{ m}; \\ v(t) &= 0.1e^{-2t} - 0.32te^{-2t} = (0.1 - 0.32t)\,e^{-2t} \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Las energías cinética y potencial del sistema en el tiempo están dadas por

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(10)\,(0.1 - 0.32t)^2\,e^{-4t} = 5(0.1 - 0.32t)^2e^{-4t} \text{ joules (J)}; \\ E_P &= \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}(40)\,(0.03 + 0.16t)^2\,e^{-4t} = 20(0.03 + 0.16t)^2e^{-4t} \text{ J}. \end{aligned}$$

Sumando estas dos energías y simplificando, se obtiene la energía total

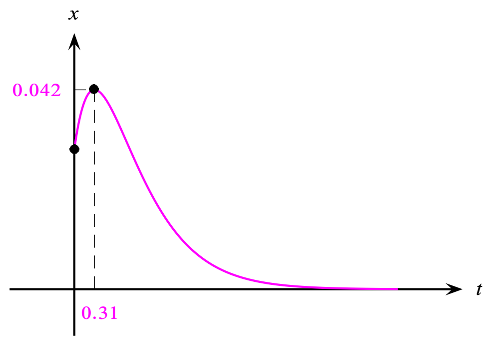
$$E_{total}(t) = \left(1.024t^2 - 0.128t + 0.068\right) e^{-4t} \text{ J}.$$

Observe que la energía total no se conserva ya que se va reduciendo en el tiempo debido al factor exponencial, esto significa que el amortiguador disipa energía del sistema y lo hace hasta que el sistema se detiene totalmente en la posición de equilibrio.

Por otra parte, observe que en el tiempo $t = \dfrac{0.1}{0.32} = 0.3125$ s, la velocidad de la masa se anula; es en este tiempo cuando la masa alcanza su máximo desplazamiento:

$$x(0.3125) = [0.03 + 0.16(0.3125)]e^{-2(0.3125)} = 0.0428 \text{ m}.$$

Al paso del tiempo la posición se acerca a la posición de equilibrio. En la gráfica siguiente se muestra la posición de la masa en el tiempo



□

Movimiento subamortiguado $c^2 - 4mk < 0$, es decir, $c < \sqrt{4mk}$

En este caso las dos raíces (5.2) de la ecuación característica son complejas y están dadas por:

$$r_1 = \frac{-c + i\sqrt{4mk - c^2}}{2m} \quad \& \quad r_2 = \frac{-c - i\sqrt{4mk - c^2}}{2m}.$$

Un conjunto de soluciones linealmente independientes de esta ED está formado por las funciones

$$x_1(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) \quad \& \quad x_2(t) = e^{-\frac{c}{2m}t} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right).$$

La solución general se obtiene considerando una combinación lineal de estas dos funciones.

$$x(t) = e^{-\frac{c}{2m}t}\left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}t\right)\right]. \tag{5.11}$$

Los términos sinusoidales que aparecen en (5.11) nos indican que el sistema oscilará alrededor de la posición de equilibrio. Sin embargo, como el factor exponencial es decreciente, se espera que la amplitud de vibración sea cada vez más pequeña. Nuevamente, las condiciones iniciales determinarán en gran medida la forma de la vibración. Por ejemplo, analicemos qué ocurre si el sistema tiene las condiciones iniciales

$$x(0) = x_0 \quad \& \quad v(0) = 0.$$

Definamos primero

$$\alpha = -\frac{c}{2m} \quad \& \quad \beta = \frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m}. \tag{5.12}$$

Entonces la posición y la velocidad están dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\alpha t}\left[c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t\right]; \\ v(t) &= \alpha e^{\alpha t}\left[c_1 \cos \beta t + c_2 \operatorname{sen} \beta t\right] + \beta e^{\alpha t}\left[-c_1 \operatorname{sen} \beta t + c_2 \cos \beta t\right] = \\ &= (\alpha c_1 + \beta c_2)\, e^{\alpha t} \cos \beta t + (\alpha c_2 - \beta c_1)\, e^{\alpha t} \operatorname{sen} \beta t. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Considerando las condiciones iniciales, obtenemos el sistema de ecuaciones

$$x_0 = x_0 \ \Rightarrow\ c_1 = x_0;$$
$$v(0) = 0 \ \Rightarrow\ \alpha c_1 + \beta c_2 = 0,$$

cuya solución es

$$c_1 = x_0 \quad \& \quad c_2 = -\frac{\alpha x_0}{\beta}.$$

Sustituyendo en la ecuación (5.13), obtenemos la función posición

$$x(t) = e^{\alpha t}\left[x_0 \cos \beta t - \frac{\alpha x_0}{\beta} \operatorname{sen} \beta t\right] = \frac{x_0}{\beta} e^{\alpha t}\left[\beta \cos \beta t - \alpha \operatorname{sen} \beta t\right].$$

Usando la relación (5.12) en la solución anterior:

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{2m x_0}{\sqrt{4mk - c^2}} e^{-\frac{c}{2m}t}\left[\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t\right) + \frac{c}{2m} \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t\right)\right] = \\ &= \frac{x_0}{\sqrt{4mk - c^2}} e^{-\frac{c}{2m}t}\left[\sqrt{4mk - c^2} \cos\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t\right) + c \operatorname{sen}\left(\frac{\sqrt{4mk - c^2}}{2m} t\right)\right]. \end{aligned} \tag{5.14}$$

□

Ejemplo 5.2.7 *Considere un sistema masa-resorte-amortiguador con las constantes siguientes:*

$$c = 2 \text{ N·s/m};\ m = 10 \text{ kg};\ k = 5 \text{ N/m};\ x_0 = 1 \text{ m};\ v_0 = 0 \text{ m/s}.$$

Encuentre la función posición.

▼ En este caso la ecuación diferencial que modela la posición $x(t)$ de la masa es

$$10\frac{d^2x}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 5x = 0.$$

La ecuación característica asociada es

$$10r^2 + 2r + 5 = 0,$$

cuyas soluciones están dadas por

$$r_1 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4(10)(5)}}{2(10)} = -\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i; \quad r_2 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4(10)(5)}}{2(10)} = -\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i.$$

Dos soluciones linealmente independientes son entonces

$$x_1(t) = e^{-\frac{t}{10}} \cos \tfrac{7}{10}t \quad \& \quad x_2(t) = e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \tfrac{7}{10}t.$$

Finalmente, la solución general de la ecuación diferencial se obtiene considerando una combinación lineal de las dos soluciones previas:

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{t}{10}} \cos \tfrac{7}{10}t + c_2 e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \tfrac{7}{10}t.$$

La velocidad instantánea se obtiene derivando la posición

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{c_1}{10} e^{-\frac{t}{10}} \cos \tfrac{7}{10}t - \frac{7c_1}{10} e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \tfrac{7}{10}t - \frac{c_2}{10} e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \tfrac{7}{10}t + \frac{7c_2}{10} e^{-\frac{t}{10}} \cos \tfrac{7}{10}t = \\ &= \left(-\frac{c_1}{10} + \frac{7c_2}{10}\right) e^{-\frac{t}{10}} \cos \tfrac{7}{10}t - \left(\frac{7c_1}{10} + \frac{c_2}{10}\right) e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \tfrac{7}{10}t. \end{aligned}$$

Para determinar el valor de las constantes c_1 & c_2, utilizamos las condiciones iniciales $x(0) = 1$ & $v(0) = 0$. Tenemos entonces el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = 1 \;\Rightarrow\; c_1 = 1; \\ v(0) &= v_0 = 0 \;\Rightarrow\; -\frac{c_1}{10} + \frac{7c_2}{10} = 0, \end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = 1 \quad \& \quad c_2 = \dfrac{1}{7}$. Sustituyendo en la posición y la velocidad:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\frac{t}{10}} \cos \tfrac{7}{10}t + \frac{1}{7}e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \tfrac{7}{10}t; \\ v(t) &= -\left(\frac{7}{10} + \frac{1}{70}\right) e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \tfrac{7}{10}t = -\frac{5}{7}e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen} \tfrac{7}{10}t. \end{aligned}$$

La posición $x(t)$ se puede reescribir en la forma:

$$x(t) = Be^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen}\left(\frac{7}{10}t + \phi\right).$$

En efecto, si se desarrolla la expresión anterior, obtenemos:

$$x(t) = Be^{-\frac{t}{10}} \left[\operatorname{sen}\left(\frac{7}{10}t\right) \cos\phi + \cos\left(\frac{7}{10}t\right) \operatorname{sen}\phi\right].$$

Si comparamos con la expresión de $x(t)$ obtenida previamente:

$$B\cos\phi = \frac{1}{7} \quad \& \quad B\operatorname{sen}\phi = 1.$$

Entonces:

$$B = \sqrt{B^2\cos^2\phi + B^2\operatorname{sen}^2\phi} = \sqrt{\frac{1}{49} + 1} = \frac{\sqrt{50}}{7},$$

y el ángulo fase ϕ esta dado por:

$$\tan\phi = \frac{B\operatorname{sen}\phi}{B\cos\phi} = 7 \;\Rightarrow\; \phi = \phi_c = \arctan(7) \approx 1.4289 \text{ rad}.$$

Finalmente:

$$x(t) = \frac{\sqrt{50}}{7}e^{-\frac{t}{10}} \operatorname{sen}\left(\frac{7t}{10} + 1.4289\right) \text{ m}.$$

La parte sinusoidal de esta expresión tiene frecuencia natural $\omega = \dfrac{7}{10}$ rad/s.
En consecuencia su periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{20\pi}{7} \text{ s}.$$

Además sus puntos máximos se obtienen cuando:

$$\operatorname{sen}\left(\frac{7t}{10} + 1.4289\right) = 1 \;\Rightarrow\; \frac{7t}{10} + 1.4289 = \frac{\pi}{2} + 2n\pi \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \frac{7t}{10} + 1.4289 = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \;\Rightarrow\; t = \frac{10}{7}\left[\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi - 1.4289\right], \text{ con } n = 0, 1, 2, \cdots$$

Por ejemplo, el primer tiempo donde se obtiene un máximo ocurre cuando:

$$\frac{7t}{10} + 1.4289 = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; t = \frac{10}{7}\left[\frac{\pi}{2} - 1.4289\right] \approx 0.2027 \text{ s}.$$

De forma similar, los puntos mínimos se obtienen cuando:

$$\frac{7t}{10} + 1.4289 = \left(2n + \frac{3}{2}\right)\pi \;\Rightarrow\; t = \frac{10}{7}\left[2n\pi + \frac{3}{2}\pi - 1.4289\right], \text{ con } n = 0, 1, 2, \cdots$$

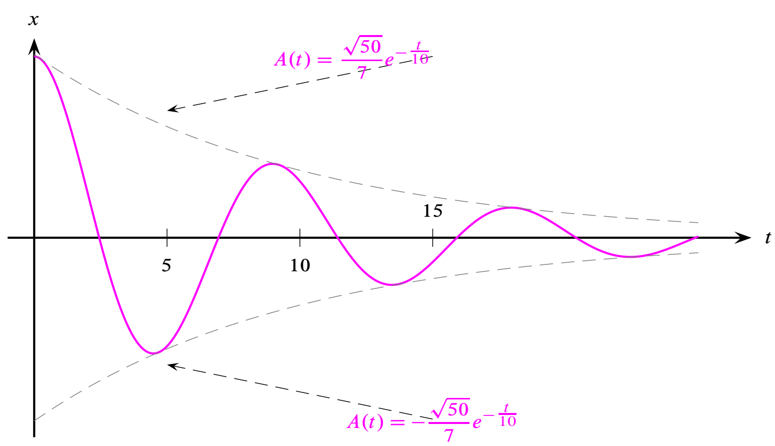
Por ejemplo, el primer tiempo donde se obtiene un mínimo es

$$t = \frac{10\left(\frac{3}{2}\pi - 1.4289\right)}{7} \approx 4.6907 \text{ s.}$$

Por otra parte, la amplitud cambia y decrece en el tiempo de forma exponencial:

$$A(t) = \frac{\sqrt{50}}{7}e^{-\frac{t}{10}}.$$

Para elaborar la gráfica de la posición, primero se grafican la amplitud y su negativo. Posteriormente, dentro de estas dos curvas, se colocan los puntos que corresponden a los máximos y mínimos de la parte sinusoidal empezando en $t = 0.2027$ s. En la figura siguiente se muestra la gráfica de la posición de la masa en el tiempo.



□

Ejemplo 5.2.8 *Un sistema masa-resorte-amortiguador, con constantes $m = 6.5$ kg, $c = 12$ N·s/m & $k = 6.5$ N/m, se suelta del reposo desde una distancia $x_0 = 0.1$ m. Determinar:*

1. *La posición y la velocidad de la masa en el tiempo $t = 2$ segundos.*
2. *Los tiempos donde la masa alcanza sus valores máximos y mínimos.*
3. *La amplitud variable de las oscilaciones.*

▼

1. La posición $x(t)$ de m, con respecto a la posición de equilibrio, en el instante $t \geq 0$, está dada por la solución del PVI:

$$\begin{aligned} mx''(t) + cx'(t) + kx(t) &= 0, \quad \text{con } x(0) = x_0 \quad \& \quad v(0) = v_0; \\ 6.5x''(t) + 12x'(t) + 6.5x(t) &= 0, \quad \text{con } x(0) = 0.1 \quad \& \quad v(0) = 0. \end{aligned}$$

La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es

$$6.5r^2 + 12r + 6.5 = 0$$

cuyas soluciones son

$$r = \frac{-12 \pm \sqrt{(12)^2 - 4(6.5)^2}}{2(6.5)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 169}}{13} = \frac{-12 \pm \sqrt{-25}}{13} = \frac{-12 \pm 5i}{13} = -\frac{12}{13} \pm \frac{5}{13}i.$$

Entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = e^{-\frac{12}{13}t}\left(c_1 \cos\frac{5}{13}t + c_2 \operatorname{sen}\frac{5}{13}t\right);$$

de donde se tiene que

$$v(t) = x'(t) = \frac{1}{13}e^{-\frac{12}{13}t}\left[(-5c_1 - 12c_2)\operatorname{sen}\frac{5t}{13} + (5c_2 - 12c_1)\cos\frac{5t}{13}\right].$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned}
x(0) = 0.1 \quad & \Rightarrow\ e^0(c_1\cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0) = 0.1 \ \Rightarrow\ c_1 = 0.1\,.\\
v(0) = 0 \quad & \Rightarrow\ \frac{1}{13}e^0[(-5c_1 - 12c_2)\operatorname{sen} 0 + (5c_2 - 12c_1)\cos 0] = 0 \ \Rightarrow\\
& \Rightarrow\ 5c_2 - 12c_1 = 0 \ \Rightarrow\ c_2 = \frac{12}{5}c_1 = \frac{12}{5}(0.1) \ \Rightarrow\ c_2 = 0.24\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la posición de la masa es

$$x(t) = e^{-\frac{12}{13}t}\left(0.1\cos\frac{5}{13}t + 0.24\operatorname{sen}\frac{5}{13}t\right)\ \text{m};$$

y su velocidad es

$$\begin{aligned}
v(t) &= -\frac{12}{13}e^{-\frac{12}{13}t}\left[0.1\cos\frac{5}{13}t + 0.24\operatorname{sen}\frac{5}{13}t\right] + e^{-\frac{12}{13}}\left[-\frac{0.5}{13}\operatorname{sen}\frac{5}{13}t + \frac{1.2}{13}\cos\frac{5}{13}t\right] =\\
&= \frac{1}{13}e^{-\frac{12}{13}t}(-3.38)\operatorname{sen}\frac{5t}{13} = -0.26e^{-\frac{12}{13}t}\operatorname{sen}\frac{5}{13}t\ \text{m/s}.
\end{aligned}$$

Luego, en $t = 2$ seg se tiene que

$$\begin{aligned}
x(2) &= e^{-\frac{24}{13}}\left(0.1\cos\frac{10}{13} + 0.24\operatorname{sen}\frac{10}{13}\right)\ \text{m} \approx 0.04\ \text{m}.\\
v(2) &= -0.26e^{-\frac{24}{13}}\operatorname{sen}\frac{10}{13}\ \text{m/s} \approx -0.029\ \text{m/s}.
\end{aligned}$$

2. Para determinar los tiempos donde la masa alcanza sus valores extremos, necesitamos calcular los instantes en los que la velocidad se anula. Esto sucede cuando,

$$\begin{aligned}
v(t) = 0 \ &\Rightarrow\ -0.26e^{-\frac{12}{13}t}\operatorname{sen}\frac{5}{13}t = 0 \ \Rightarrow\ \operatorname{sen}\frac{5t}{13} = 0 \ \Rightarrow\\
&\Rightarrow\ \frac{5t}{13} = n\pi, \quad \text{con } n\text{-entero}\\
&\Rightarrow\ t = \frac{13}{5}n\pi, \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Para estos instantes la posición está dada por

$$\begin{aligned}
x(t) &= e^{-\frac{12}{13}\left(\frac{13}{5}n\pi\right)}\left[0.1\cos\left(\frac{5}{13}\cdot\frac{13}{5}n\pi\right) + 0.24\operatorname{sen}\left(\frac{5}{13}\cdot\frac{13}{5}n\pi\right)\right] =\\
&= e^{-\frac{12}{5}n\pi}[0.1\cos n\pi + 0.24\operatorname{sen} n\pi] =\\
&= (0.1)e^{-\frac{12}{5}n\pi}\cos n\pi; \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}$$

Algunos de los valores extremos de la posición son los siguientes:

n	t	$x(t)$
0	0	0.100
1	$\frac{13}{5}\pi$	$-0.1e^{-\frac{12}{5}\pi}$
2	$\frac{26}{5}\pi$	$0.1e^{-\frac{24}{5}\pi}$
3	$\frac{39}{5}\pi$	$-0.1e^{-\frac{36}{5}\pi}$
4	$\frac{52}{5}\pi$	$0.1e^{-\frac{48}{5}\pi}$
5	13π	$-0.1e^{-12\pi}$

3. Para determinar la amplitud variable de las oscilaciones es necesario expresar la posición

$$x(t) = e^{-\frac{12}{13}t}\left(0.1\cos\frac{5t}{13} + 0.24\operatorname{sen}\frac{5t}{13}\right)$$

en la forma

$$x(t) = e^{-\frac{12}{13}t} B\operatorname{sen}\left(\frac{5t}{13} + \phi\right).$$

Para esto se debe cumplir que

$$0.1\cos\frac{5t}{13} + 0.24\operatorname{sen}\frac{5t}{13} = (B\operatorname{sen}\phi)\cos\frac{5t}{13} + (B\cos\phi)\operatorname{sen}\frac{5t}{13}.$$

Es decir: $B\operatorname{sen}\phi = 0.1$ & $B\cos\phi = 0.24$.
De donde: $B = \sqrt{(0.1)^2 + (0.24)^2} = 0.26$.
Además: $\tan\phi = \dfrac{0.1}{0.24} = 0.4167 \Rightarrow \phi_c = \arctan(0.4167) = 0.3948$.
Y debido a que $\cos\phi > 0$, entonces $\phi = \phi_c = 0.3948$.
Por lo tanto, la posición instantánea es

$$x(t) = Be^{-\frac{12}{13}t}\operatorname{sen}\left(\frac{5t}{13} + \phi\right)\ \text{m} \Rightarrow x(t) = 0.26e^{-\frac{12}{13}t}\operatorname{sen}\left(\frac{5t}{13} + 0.3948\right)\ \text{m}.$$

De aquí que la amplitud variable es

$$A(t) = 0.26e^{-\frac{12}{13}t}\ \text{m}.$$

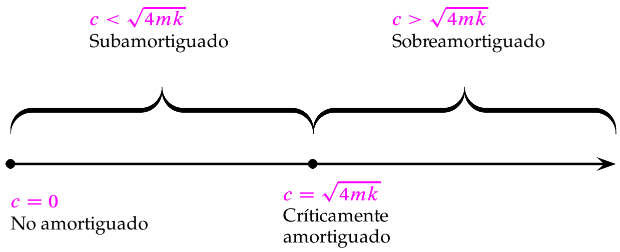
□

Para concluir esta sección, es pertinente sintetizar, para teoría y ejemplos, que los sistemas masa-resorte-amortiguador, con constantes m-k-c, respectivamente, presentan alguna de las siguientes conductas (determinadas por la relación entre las constantes):

1. Si $c^2 > 4mk$, el movimiento es sobreamortiguado. En este caso no hay oscilación.
2. Si $c^2 < 4mk$, el movimiento es subamortiguado y habrá oscilaciones que se desvanecerán cuando $t \to \infty$.

3. Si $c^2 = 4mk$, el movimiento es críticamente amortiguado. Ésta es una conducta límite entre los otros dos casos.

Advierta que, si las constantes m y k de la masa y resorte están dadas, entonces, al incluir un amortiguador, con constante c en el sistema, sucederá uno de los casos anteriores, de acuerdo al diagrama siguiente:



Ejercicios 5.2.2 *Vibraciones amortiguadas libres.* Soluciones en la página 21

1. Un resorte de constante k y un amortiguador de constante c están conectados, en uno de sus extremos, a un cuerpo de masa m y en el otro a una pared. El sistema descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. Determine la posición y velocidad del cuerpo con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$ & $v(0) = v_0$.

   a. $m = \dfrac{1}{2}$ kg, $c = 3$ N$\cdot$ s/m, $k = 4$ N/m, $x(0) = 0$ m, $v(0) = 2$ m/s.
   b. $m = 4$ kg, $c = 16$ N$\cdot$ s/m, $k = 16$ N/m, $x(0) = 1$ m, $v(0) = -1$ m/s.
   c. $m = \dfrac{1}{4}$ kg, $c = 5$ N$\cdot$ s/m, $k = 169$ N/m, $x(0) = 0$ m, $v(0) = 16$ m/s.

2. Un cuerpo de masa igual a 1 kg está unido a un resorte de constante $k = 5$ N/m y a un amortiguador, con constante $c = 2$ N$\cdot$s/m. Se alarga el resorte una distancia de 0.3 m y se suelta del reposo. Determine los tiempos en que se obtienen los dos primeros desplazamientos máximos y los dos primeros desplazamientos mínimos. Calcule también la amplitud y el ángulo fase del movimiento.

3. A un sistema masa-resorte, con masa igual a 5 kg y constante del resorte igual a 5 N/m, se le conecta un amortiguador de constante c. Determine la posición y velocidad del cuerpo con las condiciones iniciales $x(0) = 0$ m, $v(0) = 2$ m/s para los siguientes valores de la constante de amortiguamiento: $c = 6, 8, 10, 12$ y 14 N$\cdot$s/m.

4. A un sistema masa-resorte, con masa igual a 0.5 kg y constante del resorte igual a 12.5 N/m, se le conecta un amortiguador de constante $c = 4$ N$\cdot$s/m. Determine la posición y velocidad del cuerpo cuando las condiciones iniciales son $x(0) = 0$ m, $v(0) = 0.2$ m/s; ¿qué ocurre si las condiciones iniciales se modifican a $x(0) = 0$ m, $v(0) = -0.2$ m/s?

5. Una masa de 1 kg se une a un resorte de constante $k = 4$ N/m. El medio ofrece una fuerza de amortiguamiento que es numéricamente igual a cinco veces la velocidad instantánea. La masa se libera desde un punto situado 0.3 m arriba de la posición de equilibrio, con una velocidad descendente de 2.4 m/s. Determine el tiempo en el que la masa pasa por la posición de equilibrio. Encuentre el tiempo en el que la masa alcanza su desplazamiento extremo. ¿Cuál es la posición de la masa en ese instante?

6. Un resorte de 21 cm alcanza 30.8 cm después de colgarle una masa de 1/4 de kilogramo. El medio por el que se mueve la masa ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 3 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento, si la masa se libera de la posición de equilibrio, con una velocidad descendente de 2 m/s. Calcule el tiempo en el que la masa alcanza su desplazamiento extremo, ¿cuál es la posición de la masa en ese instante?

7. Una masa de 1 kg se fija a un resorte cuya constante es 16 N/m y luego el sistema completo se sumerge en un líquido que ofrece una fuerza amortiguadora igual a 10 veces la velocidad instantánea. Determine la posición de la masa, si

   a. La masa se libera del reposo desde un punto situado 0.1 m debajo de la posición de equilibrio.
   b. La masa se libera desde un punto 0.1 m debajo de la posición de equilibrio, con una velocidad ascendente de 1.2 m/s.

8. Una fuerza de 2 N alarga un resorte 10 cm. Una masa de 0.2 kg se une al resorte y luego se sumerge el sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 4 veces la velocidad instantánea. Encuentre la ecuación de movimiento, si en el tiempo $t = 0$ se libera la masa desde el reposo en un punto situado a 5 cm por encima de la posición de equilibrio. ¿Pasará la masa por la posición de equilibrio?

9. De un resorte de 1.5 m se sujeta una masa de 0.125 kg y el resorte se elonga hasta medir 1.598 m. Se retira la masa y se sustituye con otra de 0.5 kg. Después se coloca el sistema en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a 3 veces la velocidad instantánea.

   a. Obtenga la ecuación de movimiento, si en el tiempo $t = 0$ se libera la masa desde el reposo en un punto situado a 20 cm por encima de la posición de equilibrio.
   b. Obtenga el tiempo en el cual la masa pasa por primera vez a través de la posición de equilibrio en dirección hacia arriba.
   c. Determine los tiempos en los que la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo.
   d. Calcule los tiempos en los que la masa tiene velocidad igual a cero y los puntos donde esto ocurre.

10. Una masa de 3 kg se sujeta a un resorte y se desliza horizontalmente con coeficiente de amortiguamiento c. La constante del resorte es $k = 12$ N/m y el movimiento comienza en la posición de equilibrio $x_0 = 0$ m, con una velocidad inicial diferente de cero.

    a. Suponiendo que no existe amortiguamiento, ¿qué tiempo tomará al objeto para regresar a la posición de reposo por primera vez?
    b. ¿Qué valor de c es necesario para que el sistema presente amortiguamiento crítico?
    c. ¿Qué ocurre en el tiempo que se encontró en el inciso a. cuando c aumenta, aproximándose al valor del amortiguamiento crítico?

11. Una masa de $\dfrac{1}{2}$ kg se sujeta a un resorte que se encuentra en un medio que posee un coeficiente de amortiguamiento γ. La constante del resorte es $k = \dfrac{169}{2}$ N/m y el movimiento comienza en la posición de equilibrio con una velocidad inicial positiva de 2.4 m/s.

    a. Determine el tipo de movimiento que se tiene para $\gamma = 13$.
    b. Calcular la posición y la velocidad de la masa para $\gamma = 13$.
    c. Determine la posición y la velocidad de la masa para $\gamma = 12$.
    d. Obtener la posición y la velocidad de la masa para $\gamma = 16.25$.

12. Una masa de $\dfrac{1}{7}$ kg alarga un resorte en 0.2 m. La masa se coloca a 0.1 m por arriba del punto de equilibrio y luego inicia el descenso con una velocidad positiva de 0.5 m/s. El movimiento se efectúa en un medio que ofrece una fuerza de amortiguamiento igual a $\dfrac{8}{5}$ veces la velocidad instantánea en todo momento. Encuentre la ecuación que describe la posición de la masa en el instante t.

13. Considere un resorte al que una masa de 0.25 kg alarga en 9.8 cm. La masa está sujeta al resorte y se mueve en un medio que imprime una fuerza de amortiguamiento igual a 5 veces la velocidad instantánea. La masa se coloca a 0.15 m por arriba del punto de equilibrio y se libera con una velocidad negativa de 1.5 m/s. Encuentre la posición de la masa en el tiempo t.

14. Un resorte de constante $k = 8$ N/m se coloca en forma vertical y colgada de él se tiene una masa de 2 kg. Posteriormente se coloca la masa a una altura de 0.1 m arriba del punto de equilibrio y se suelta con una velocidad positiva de 1.72 m/s. Si el medio ofrece una resistencia igual a $\frac{24}{5}$ veces la velocidad instantánea, determine:

    a. Los tres primeros tiempos en que la masa pasa por la posición de equilibrio.
    b. Los tres primeros tiempos en que la masa se detiene.

15. Un resorte de constante $k = 8$ N/m se coloca en forma vertical y colgada de él se coloca una masa de 2 kg. Posteriormente se coloca la masa a una altura de 0.1 m arriba del punto de equilibrio y se suelta con una velocidad negativa de 1.48 m/s. Si el medio ofrece una resistencia igual a $\frac{24}{5}$ veces la velocidad instantánea, determine:

    a. Los tres primeros tiempos en que la masa pasa por la posición de equilibrio.
    b. Los tres primeros tiempos en que la masa se detiene.

Ejercicios 5.2.2 *Vibraciones amortiguadas libres.* *Página: 18*

1. a. $x(t) = -e^{-4t} + e^{-2t}$ m; $v(t) = 4e^{-4t} - 2e^{-2t}$ m/s;
   b. $x(t) = (t+1)e^{-2t}$ m; $v(t) = -(2t+1)e^{-2t}$ m/s;
   c. $x(t) = \frac{2}{3}e^{-10t}\operatorname{sen} 24t$ m; $v(t) = e^{-10t}\left[-\frac{20}{3}\operatorname{sen} 24t + 16\cos 24t\right]$ m/s.
2. Amplitud: $A(t) = 0.3354e^{-t}$ m;
   ángulo de fase: $\phi = 1.1072$ rad;
   $x_{\text{máx}}$ en : $t_1 = 0.2318$ s & $t_3 = 3.3734$ s;
   $x_{\text{mín}}$ en : $t_2 = 1.8026$ s & $t_4 = 4.9442$ s.
3.

c	$x(t)$ en m	$v(t)$ en m/s
6	$2.5e^{-0.6t}\operatorname{sen}(0.8t)$	$[2\cos(0.8t) - 1.5\operatorname{sen}(0.8t)]e^{-0.6t}$
8	$3.333e^{-0.8t}\operatorname{sen}(0.6t)$	$[2\cos(0.6t) - 2.667\operatorname{sen}(0.6t)]e^{-0.8t}$
10	$2te^{-t}$	$2(1-t)e^{-t}$
12	$1.508(-e^{-1.863t} + e^{-0.537t})$	$2.809e^{-1.863t} - 0.81e^{-0.537t}$
14	$1.02(-e^{-2.38t} + e^{-0.42t})$	$2.428e^{-2.38t} - 0.428e^{-0.42t}$

4. $x(t) = \frac{v_0}{3}e^{-4t}\operatorname{sen} 3t$ m;
   $v(t) = v_0 e^{-4t}\left(\cos 3t - \frac{4}{3}\operatorname{sen} 3t\right)$ m/s.
5. $x(t) = 0$ cuando $t = 0.1865$ s;
   $x(t) = x_{\text{máx}}$ cuando $t = 0.6487$ s;
   $x_{\text{máx}} = x(0.6487) = 0.1568$ m.
6. $x(t) = \frac{1}{4}e^{-6t}\operatorname{sen} 8t$ m & $v(t) = 2e^{-6t}\cos 8t - \frac{3}{2}e^{-6t}\operatorname{sen} 8t$ m/s;
   $x(t) = x_{\text{máx}}$ cuando $t = 0.1159$ s;
   $x_{\text{máx}} = x(0.1159) = 0.0998$ m.
7. a. $x(t) = -\frac{1}{30}e^{-8t} + \frac{2}{15}e^{-2t}$ m;
   b. $x(t) = \frac{1}{6}e^{-8t} - \frac{1}{15}e^{-2t}$ m.
8. $x(t) = (-0.05 - 0.5t)e^{-10t}$ m;
   la masa no pasa por la posición de equilibrio.
9. a. $x(t) = -(0.2\cos 4t + 0.15\operatorname{sen} 4t)e^{-3t}$ m & $v(t) = 1.25e^{-3t}\operatorname{sen} 4t$ m/s;
   b. $t = 1.339$ s & $v = -0.018$ m/s;
   c. $t = 0.7854n - 1.0172$, con $n = 2, 4, 6, \cdots$;
   d. $t = \frac{n\pi}{4}$, con $n = 1, 2, 3, \cdots$;
      la posición es $x(t) = -0.2e^{-\frac{3n\pi}{4}}$.
10. a. $t = \frac{\pi}{2}$ s;
    b. $c = 12$;
    c. No se regresará al punto de equilibrio.
11. a. Movimiento críticamente amortiguado;
    b. $x(t) = 2.4te^{-13t}$ m & $v(t) = 2.4(1 - 13t)e^{-13t}$ m/s;

c. $x(t) = 0.48e^{-12t}\operatorname{sen} 5t$ m & $v(t) = (2.4\cos 5t - 5.76\operatorname{sen} 5t)e^{-12t}$ m/s;

d. $x(t) = \dfrac{8}{65}e^{-6.5t} - \dfrac{8}{65}e^{-26t}$ m & $v(t) = -\dfrac{4}{5}e^{-6.5t} + \dfrac{16}{5}e^{-26t}$ m/s.

12. $x(t) = -\dfrac{1}{10}\left[\cos\left(\dfrac{21t}{5}\right) + \dfrac{1}{7}\operatorname{sen}\left(\dfrac{21t}{5}\right)\right]e^{\frac{-28t}{5}}$ m.

13. $x(t) = -(0.15 + 3t)e^{-10t}$ m.

14. a. $t = 0.0623;\ 2.0258;\ 3.9893$ s;

    b. $t = 0.6419;\ 3.7835;\ 6.9250$ s.

15. a. $t = 1.9012;\ 3.8647;\ 5.8282$ s;

    b. $t = 0.5173;\ 3.6589;\ 6.8$ s.