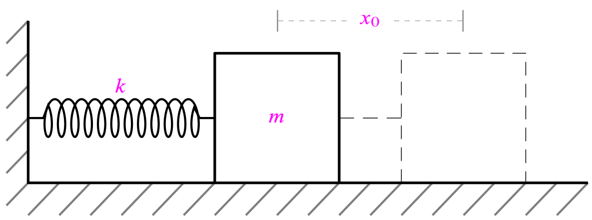
CAPÍTULO

5

Aplicaciones de ED de segundo orden

5.2.1 Movimiento armónico simple



Sistema masa-resorte para el estudio de las vibraciones mecánicas

Para iniciar el estudio de las vibraciones mecánicas, analicemos una situación cotidiana y simple. Consideremos un cuerpo de masa m que está unido a una pared por medio de un resorte de constante k (sistema masa-resorte) el cual se encuentra sobre una mesa horizontal. Por simplicidad supongamos también que no existe fricción entre el cuerpo y la mesa y que el sistema se encuentra inicialmente en equilibrio. De repente, el resorte se comprime (o se elonga) una distancia pequeña x_0, medida desde la posición de equilibrio (ver figura anterior), y se le aplica una velocidad v_0. Desde ese momento, el resorte ejerce una fuerza sobre la masa que tiende a regresarla a su posición de equilibrio inicial. En general, esta fuerza depende de la distancia comprimida (o elongada) del resorte. Si la compresión (o elongación) es pequeña, se puede suponer que la fuerza es directamente proporcional a dicha deformación y que siempre apunta hacia la posición de equilibrio o en sentido contrario a la deformación. Dicha suposición se conoce como ley de Hooke para resortes lineales. Es decir, la fuerza F_R que en todo momento ejerce el resorte sobre la masa está dada por

$$F_R = -kx,$$

donde x es la deformación y $k > 0$ es la constante del resorte.

Por otra parte, y de acuerdo con la segunda ley de Newton, la suma de todas la fuerzas que se aplican a un cuerpo produce un cambio a su movimiento que se rige por la ecuación

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2}.$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

Igualando estos dos resultados, se obtiene el PVI que modela el sistema masa-resorte:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx, \text{ con las condiciones iniciales } x(0) = x_0 \ \& \ v(0) = v_0;$$

o equivalentemente:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0, \quad \text{con } x(0) = x_0 \ \& \ x'(0) = v_0. \tag{5.1}$$

El modelo encontrado es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes. Para resolverla, proponemos como solución de la ecuación diferencial una función del tipo $x = e^{rt}$. Derivando dos veces con respecto al tiempo y sustituyendo en (**??**) obtenemos la ecuación algebraica

$$(mr^2 + k)e^{rt} = 0 \ \Rightarrow \ mr^2 + k = 0;$$

cuyas dos raíces son imaginarias debido a que m y k son constantes positivas,

$$mr^2 + k = 0 \ \Rightarrow \ r^2 = -\frac{k}{m} \ \Rightarrow \ r = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}\,i; \text{ donde } i = \sqrt{-1}.$$

Si definimos la frecuencia natural del sistema como $w = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, tendremos $r = \pm iw$, de tal forma que un conjunto fundamental de soluciones lo constituyen las dos funciones sinusoidales $\cos wt$ y $\operatorname{sen} wt$. Entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt. \tag{5.2}$$

Derivando la ecuación (**??**), se obtiene la velocidad del cuerpo, ésta es

$$x'(t) = v(t) = -c_1 w \operatorname{sen} wt + c_2 w \cos wt. \tag{5.3}$$

Las constantes c_1 & c_2 que aparecen en las ecuaciones (**??**) y (**??**) se deben determinar a partir de las condiciones iniciales de movimiento. Como la masa se encuentra inicialmente ($t = 0$) a una distancia x_0 de la posición de equilibrio, y se suelta con velocidad inicial v_0, entonces se debe cumplir que

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0) = c_1(1) + c_2(0) = c_1. \\ v_0 &= v(0) = -c_1 w \operatorname{sen}(0) + c_2 w \cos(0) = -c_1 w(0) + c_2 w(1) = c_2 w, \end{aligned}$$

de donde

$$c_1 = x_0 \quad \& \quad c_2 = \frac{v_0}{w}. \tag{5.4}$$

Finalmente, integrando los resultados anteriores (**??**) a la ecuación (**??**), se obtiene la siguiente expresión para la posición instantánea de la masa en todo tiempo t:

$$x(t) = x_0 \cos wt + \frac{v_0}{w} \operatorname{sen} wt. \tag{5.5}$$

Por otra parte, para poder analizar la ecuación anterior conviene escribirla en cualquiera de las dos formas compactas equivalentes

$$x(t) = A \operatorname{sen}(wt + \phi) \quad \text{o bien} \quad x(t) = A\cos(wt - \phi_1).$$

Equivalencia que se obtiene con recordar que las funciones seno y coseno estan desfasadas un ángulo $\dfrac{\pi}{2}$, es decir:

$$\operatorname{sen}\theta = \cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right).$$

En consecuencia, si elegimos $\theta = wt + \phi$, se debe cumplir:

$$wt + \phi - \frac{\pi}{2} = wt - \phi_1,$$

de donde:

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \phi.$$

Queremos reescribir la posición de la masa en la forma $x(t) = A\operatorname{sen}(wt + \phi)$.
Se tiene $x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt$ y se quiere $x(t) = A\operatorname{sen}(wt + \phi)$.
Lo que se tiene coincide con lo que se quiere cuando:

$$\begin{aligned} c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt &= A\operatorname{sen}(wt + \phi) = A[\operatorname{sen} wt \cos\phi + \operatorname{sen}\phi \cos wt] = \\ &= (A\cos\phi)\operatorname{sen} wt + (A\operatorname{sen}\phi)\cos wt = (A\operatorname{sen}\phi)\cos wt + (A\cos\phi)\operatorname{sen} wt. \end{aligned}$$

Y esto sucede si

$$A\operatorname{sen}\phi = c_1 \quad \& \quad A\cos\phi = c_2. \tag{5.6}$$

De estas igualdades se tiene que

$$c_1^2 + c_2^2 = A^2\operatorname{sen}^2\phi + A^2\cos^2\phi = A^2(\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi) = A^2(1) = A^2.$$

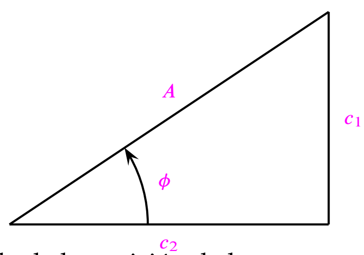
De donde:

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2},$$

y además, con $c_2 \neq 0$,

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{A\operatorname{sen}\phi}{A\cos\phi} = \tan\phi \;\Rightarrow\; \phi = \arctan\frac{c_1}{c_2}.$$

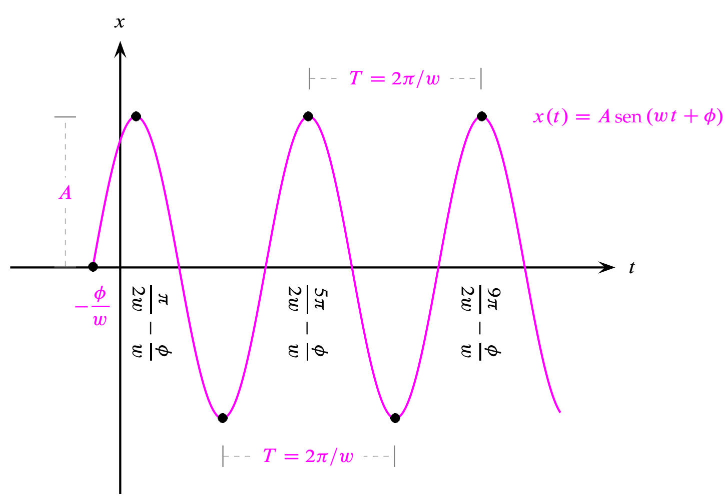
Es útil recordar estas relaciones usando el triángulo:



Obtenemos así una fórmula simplificada de la posición de la masa, con respecto a su posición de equilibrio:

$$x(t) = A\operatorname{sen}(wt + \phi). \tag{5.7}$$

En esta expresión, A y ϕ se definen respectivamente como la amplitud de la oscilación y el ángulo de fase.
Veamos ahora el significado físico de estos conceptos, que se representan en la figura siguiente:



Se tiene que la posición $x(t)$ toma valores en el intervalo $[-A, A]$ ya que

$$\begin{aligned}-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1,\ \text{con } \theta \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \ & |\operatorname{sen}\theta| \leq 1,\ \text{con } \theta \in \mathbb{R} \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ & |\operatorname{sen}(wt+\phi)| \leq 1 \ \Rightarrow \ A|\operatorname{sen}(wt+\phi)| \leq A,\ \text{con } A > 0 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ & |A\operatorname{sen}(wt+\phi)| \leq A \ \Rightarrow \ |x(t)| \leq A \ \Rightarrow \ -A \leq x(t) \leq A.\end{aligned}$$

De forma que A es la máxima separación del cuerpo con respecto a la posición de equilibrio. De aquí que A sea la amplitud (máxima) de la oscilación.
Este desplazamiento máximo ocurre cuando:

$$\begin{aligned}|x(t)| = A \ \Rightarrow \ & |\operatorname{sen}(wt+\phi)| = 1 \ \Rightarrow \ \operatorname{sen}(wt+\phi) = \pm 1 \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ & wt + \phi = \frac{\pi}{2} + n\pi,\ \text{con } n \text{ entero} \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ & wt + \phi = (2n+1)\frac{\pi}{2},\ \text{con } n \text{ entero} \ \Rightarrow \\ \Rightarrow \ & t = \frac{(2n+1)\frac{\pi}{2} - \phi}{w},\ \text{con } n \text{ entero y con } t \geq 0\,.\end{aligned}$$

Mediante esta relación, se obtienen los instantes en que $x(t) = A$ (n par), así como los instantes en que $x(t) = -A$ (n impar) y la condición $t \geq 0$.
A la diferencia entre dos tiempos consecutivos donde $x(t) = A$ se le denomina periodo de la función $x(t)$ y al movimiento realizado en dicho intervalo de tiempo se le conoce como una oscilación completa. Es decir, el periodo T es el (intervalo de) tiempo que tarda la masa m en dar una oscilación completa.
Mostraremos ahora que $T = \dfrac{2\pi}{w}$ s. Para ello consideremos que $x(t) = A\operatorname{sen}(wt+\phi)$. Entonces:

$$\begin{aligned}x(t+T) = A\operatorname{sen}[w(t+T)+\phi] = A\operatorname{sen}\left[w\left(t+\frac{2\pi}{w}\right)+\phi\right] = \\ = A\operatorname{sen}[wt+2\pi+\phi] = A\operatorname{sen}[(wt+\phi)+2\pi] = \\ = A\operatorname{sen}(wt+\phi) = x(t).\end{aligned}$$

Lo que implica que $x(t+T) = x(t)$ para $T = \dfrac{2\pi}{w}$.
Ahora bien, si la masa m tarda T segundos en dar una oscilación completa, ¿cuántas veces oscilará en un segundo? Al número f de oscilaciones que da el oscilador armónico en la unidad de tiempo se le denomina frecuencia del oscilador; ésta queda determinada por la proporción:

$$\frac{1}{T}\frac{\text{oscilaciones}}{\text{segundos}} = \frac{f}{1}\frac{\text{oscilaciones}}{\text{segundo}};\ \text{de donde } f = \frac{1}{T}\frac{\text{oscilaciones}}{\text{segundo}}\,.$$

Es decir, la frecuencia f del oscilador armónico está dada por

$$f = \frac{1}{T}\frac{\text{osc}}{\text{seg}} = \frac{1}{T}\frac{\text{ciclos}}{\text{seg}} = \frac{w}{2\pi}\ \text{hertz (H)}.$$

Observe que la frecuencia f del oscilador es diferente de la frecuencia natural w del sistema.
Además note que el periodo $T = \dfrac{2\pi}{w}$ también es la diferencia entre dos tiempos consecutivos en los que $x(t) = -A$.
Finalmente, estudiemos el número real ϕ. Al número ϕ se le denomina ángulo de fase, ya que está relacionado con el desfasamiento $\dfrac{\phi}{w}$ que existe entre las curvas $x(t) = \operatorname{sen} wt$ & $x(t) = \operatorname{sen}(wt+\phi)$.
Ahora, ¿cómo determinamos el valor de ϕ?
Recordemos que la posición instantánea $x(t)$ está dada por

$$x(t) = c_1\cos wt + c_2\operatorname{sen} wt = A\operatorname{sen}(wt+\phi).$$

Y por lo tanto:

1. Si $c_1 = x_0 = 0$ entonces,

$$x(t) = c_2 \operatorname{sen} wt = A \operatorname{sen}(wt + \phi) \;\Rightarrow\; A = |\, c_2 \,| \;\&\; \phi = 0 \text{ o bien } \phi = \pi.$$

2. Si $c_2 = \dfrac{v_0}{w} = 0$ entonces,

$$x(t) = c_1 \cos wt = c_1 \operatorname{sen}\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) = A \operatorname{sen}(wt + \phi) \;\Rightarrow\; A = |\, c_1 \,| = |\, x_0 \,| \;\&\; \phi = \frac{\pi}{2}.$$

3. Si $c_2 \neq 0$ entonces,

$$x(t) = c_1 \cos wt + c_2 \operatorname{sen} wt = A \operatorname{sen}(wt + \phi) \;\Rightarrow\; A \operatorname{sen}\phi = c_1 \;\&\; A \cos\phi = c_2,$$

de donde $\phi = \arctan \dfrac{c_1}{c_2}$.

Para calcular ϕ con esta fórmula, por lo común es necesario utilizar una calculadora, la cual nos proporciona un número: $\arctan \dfrac{c_1}{c_2} = \phi_c$.

¿Es este número ϕ_c en verdad el número ϕ que buscamos? Aparentemente sí, pero hay que analizar con más detalle. Veamos.

La función $\theta = \arctan u$ es la inversa de la función $u = \tan\theta$ para $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ y éste es el rango que obtenemos al usar una calculadora. Por esta razón una calculadora dará siempre un número $\phi_c \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, cuando se usan radianes y no grados.

¡Nunca se debe usar grados para funciones trigonométricas si hay derivadas o integrales en ellas!

Para $\theta \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ sabemos que $\cos\theta > 0$.

Por lo tanto, reconsiderando las igualdades

$$A \operatorname{sen}\phi = c_1 \quad \& \quad A\cos\phi = c_2.$$

a. Si $c_2 > 0$, entonces $\cos\phi > 0$, por lo cual $\phi \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ que coincide con ϕ_c. Esto es, $\phi = \phi_c$.

b. Si $c_2 < 0$, entonces $\cos\phi < 0$, por lo cual $\phi \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ que no coincide con ϕ_c. En este caso ocurre que entre ϕ y ϕ_c existe una diferencia de π radianes, por lo que $\phi = \phi_c + \pi$. Esto es, al número ϕ_c dado por una calculadora, se le debe sumar π para así tener el ángulo de fase ϕ.

¿En qué instantes pasa la masa m por la posición de equilibrio?

$$\begin{aligned} x(t) = 0 \;&\Rightarrow\; A \operatorname{sen}(wt + \phi) = 0 \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}(wt + \phi) = 0 \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; wt + \phi = n\pi, \;\text{ con } n\text{-entero} \;\Rightarrow \\ &\Rightarrow\; t = \frac{n\pi - \phi}{w}, \;\text{ con } n\text{-entero y con } t \geq 0. \end{aligned}$$

Es decir, mediante esta relación se obtienen los instantes $t \geq 0$ en que $x(t) = 0$; esto es, los instantes en que el cuerpo pasa por su posición de equilibrio.

Por otra parte, si la posición y velocidad iniciales son x_0 y v_0 entonces, de acuerdo con las ecuaciones (**??**) y (**??**), la amplitud es

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{w^2}}.$$

Y el ángulo de fase satisface:

$$\tan\phi = \frac{x_0 w}{v_0}.$$

Reuniendo estos resultados, es posible escribir la expresión (**??**) en la página **??** como

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{w^2}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi\right).$$

Hemos dicho que en un movimiento vibratorio es importante saber qué está pasando con la energía. Para ello necesitamos reescribir la ecuación diferencial (**??**) de la página **??** en una forma alternativa.
Consideraremos entonces que

$$\begin{aligned}
&m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \\
&\Rightarrow m\frac{dv}{dt} + kx = 0, \quad \text{usando la definición de velocidad} \quad v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow \\
&\Rightarrow m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} + kx = 0, \quad \text{aplicando la regla de la Cadena} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} \Rightarrow \\
&\Rightarrow mv\frac{dv}{dx} + kx = 0, \quad \text{aplicando de nueva cuenta la definición de velocidad} \Rightarrow \\
&\Rightarrow mvdv + kxdx = 0, \quad \text{separando las variables.}
\end{aligned}$$

Finalmente, integrando obtenemos E, la energía total del sistema:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C. \tag{5.8}$$

En esta expresión identificamos los siguientes términos:

- La energía cinética del sistema $E_c = \dfrac{1}{2}mv^2$, debida a que el cuerpo se mueve con velocidad v.

- La energía potencial del resorte $E_p = \dfrac{1}{2}kx^2$, debida a que el resorte se comprime o elonga una cantidad x.

- La energía total del sistema $E = E_c + E_p$.

La ecuación (**??**) se conoce como la ley de Conservación de Energía para el caso de un sistema masa-resorte y señala que la suma de energía cinética más la energía potencial del resorte siempre es una constante. Esto significa que, cuando se pierde energía potencial, se gana energía cinética y viceversa, de tal suerte que el resultado de su suma no cambia. En consecuencia, cuando la distancia x de la masa a la posición de equilibrio disminuye, entonces aumenta la velocidad, y la máxima velocidad de la masa se obtiene justo cuando ésta pasa por la posición de equilibrio del sistema. Por otra parte, cuando la masa se aleja, aumenta la energía potencial del resorte y disminuye su energía cinética. Cuando ésta última finalmente se anula, se obtiene la mayor elongación o comprensión del resorte; a estos puntos se los conoce como puntos de retorno.

Ejemplo 5.2.1 *Considere una masa de* 10 *kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante* $k = 10$ *N/m. Si se alarga el resorte una distancia de* 0.02 *m y se suelta a partir del reposo, determine la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, la frecuencia de oscilación, la amplitud, el ángulo de fase y las energías cinética y potencial en el tiempo* t.

▼ El PVI que modela la posición $x(t)$ de la masa es

$$10\frac{d^2x}{dt^2} + 10x = 0, \quad \text{con } x(0) = 0.02 \quad \& \quad x'(0) = 0.$$

Proponiendo como solución $x = e^{rt}$, derivando dos veces con respecto al tiempo, usando estos resultados en la ecuación diferencial y simplificando, obtenemos la ecuación característica

$$10r^2 + 10 = 0.$$

Las raíces de esta ecuación son $r_{1,2} = \pm i$. Como ambas son complejas, las dos funciones que resuelven la ecuación diferencial, y que son linealmente independientes, son $x_1(t) = \cos t$ & $x_2(t) = \operatorname{sen} t$. De suerte que la solución general de la ecuación diferencial es la combinación lineal de ellas, es decir:

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t.$$

Derivando obtenemos la velocidad de la masa:

$$x'(t) = v(t) = -c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \cos t.$$

Para determinar los coeficientes c_1 & c_2 utilizamos las condiciones iniciales. Para ello utilizamos en el tiempo $t = 0$ los valores $x_0 = 0.02$ y $v_0 = 0$. Así obtenemos:

$$\begin{aligned} 0.02 &= x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0) = c_1(1) + c_2(0) = c_1; \\ 0 &= v(0) = -c_1 \operatorname{sen}(0) + c_2 \cos(0) = -c_1(0) + c_2(1) = c_2. \end{aligned}$$

Finalmente, usando los coeficientes en las expresiones para la posición y la velocidad, obtenemos:

$$x(t) = 0.02 \cos t = 0.02 \operatorname{sen}\left(t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m} \quad \& \quad v(t) = -0.02 \operatorname{sen} t \text{ m/s}.$$

Tanto la posición como la velocidad son funciones sinusoidales de frecuencia natural $w = 1$ rad/s, periodo $T = 2\pi$ s y de amplitud $A = 0.02$ m. La frecuencia de oscilación es $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{2\pi}$ osc/seg $= \dfrac{1}{2\pi}$ hertz (H).
El ángulo de fase es $\phi = \dfrac{\pi}{2}$ rad.
Observe que el máximo valor de $x(t)$ se obtiene cuando $\cos t = 1$, y esto se logra en los tiempos:

$$t = 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi, \ldots$$

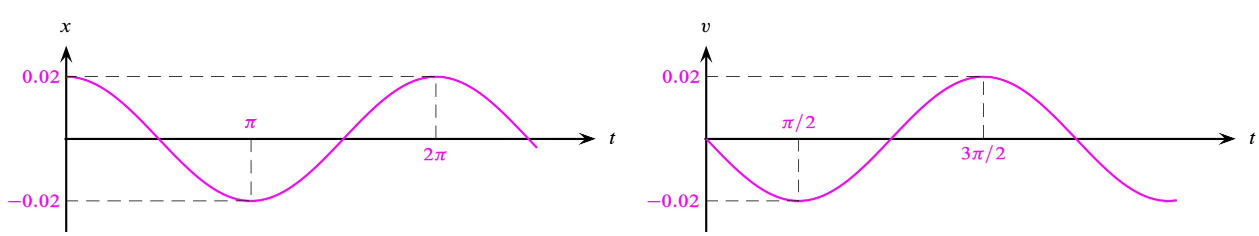
De la misma forma, el mínimo valor de $x(t)$ se obtiene cuando $\cos t = -1$, y esto ocurre cuando:

$$t = \pi, 3\pi, 5\pi, \ldots$$

En estos tiempos la velocidad se anula.
Igualmente, la rapidez de la masa es máxima cuando $|\operatorname{sen} t| = +1$, que ocurre cuando $t = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{5\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{2}, \ldots$
Esta rapidez máxima se alcanza en la posición de equilibrio $x = 0$. En la figura siguiente se muestra tanto la posición como la velocidad en el tiempo.
Por otra parte la energía cinética y potencial están dadas por

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = 0.002 \operatorname{sen}^2 t \quad \& \quad E_p = \frac{1}{2}kx^2 = 0.002 \cos^2 t.$$

Sumando las dos energías y usando la identidad $\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t = 1$, obtenemos que la energía total es constante $E_T = 0.002$ joules (J).



1. En la gráfica de la izquierda, la que corresponde a la posición de la masa, los puntos de la gráfica que se encuentran arriba del eje horizontal son los tiempos en los cuales $x(t) > 0$. En esos momentos, la masa se encuentra a la derecha de la posición de equilibrio. Para aquellos t que corresponden a los puntos de la gráfica por debajo de la posición horizontal, la masa se encuentra a la izquierda de la posición de equilibrio.

2. En la gráfica de la derecha, los puntos de la gráfica que se encuentran arriba del eje horizontal (es decir, cuando $v(t) > 0$) indican que la velocidad de la masa es hacia la derecha. También vemos que cuando $v(t) < 0$ (es decir, cuando los puntos de la gráfica se encuentran abajo del eje horizontal) la masa tiene una velocidad que se dirige hacia la izquierda.

□

Ejemplo 5.2.2 *Considere una masa de 2 kg que está unida a una pared por medio de un resorte de constante $k = 200$ N/m; que se comprime el resorte una distancia de 0.03 m y se le suelta con una velocidad de 0.4 m/s hacia la posición de equilibrio. Determine la posición y la velocidad de la masa en el tiempo, calcule también la frecuencia de oscilación, la amplitud y el ángulo de fase.*

▼ El PVI que describe la posición $x(t)$ de la masa es

$$2\frac{d^2x}{dt^2} + 200x = 0, \quad \text{con} \quad x(0) = -0.03 \ \& \ v(0) = 0.4\,.$$

La ecuación característica en este caso es

$$2r^2 + 200 = 0 \Rightarrow r^2 + 100 = 0,$$

cuyas soluciones son $r = \pm 10i$. En consecuencia, dos soluciones linealmente independientes son

$$x_1(t) = \cos 10t \quad \& \quad x_2(t) = \operatorname{sen} 10t.$$

De forma que la solución general es la combinación lineal de ellas

$$x(t) = c_1 \cos 10t + c_2 \operatorname{sen} 10t.$$

Al derivar con respecto al tiempo, obtenemos la velocidad de la masa, ésta es

$$v(t) = -10c_1 \operatorname{sen} 10t + 10c_2 \cos 10t.$$

Utilizando las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{aligned} -0.03 &= x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0) = c_1; \\ 0.4 &= v(0) = -10c_1 \operatorname{sen}(0) + 10c_2 \cos(0) = 10c_2. \end{aligned}$$

De donde resulta:

$$c_1 = -0.03 \ \& \ c_2 = 0.04.$$

Usando estos valores en la función posición $x(t)$:

$$x(t) = -0.03 \cos 10t + 0.04 \operatorname{sen} 10t.$$

Expresamos $x(t)$ en la forma $x(t) = A \operatorname{sen}(10t + \phi)$.
Para esto consideramos que

$$A = \sqrt{(-0.03)^2 + (0.04)^2} = 0.05\,.$$

Y además que

$$\begin{aligned} x(t) = -0.03 \cos 10t + 0.04 \operatorname{sen} 10t &= A \operatorname{sen}(10t + \phi) = \\ &= A(\operatorname{sen} 10t \cos\phi + \operatorname{sen}\phi \cos 10t) = \\ &= (A\cos\phi) \operatorname{sen} 10t + (A \operatorname{sen}\phi) \cos 10t, \end{aligned}$$

siempre y cuando que

$$A \operatorname{sen}\phi = -0.03 \quad \& \quad A\cos\phi = 0.04 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \operatorname{sen}\phi = \frac{-0.03}{A} = \frac{-0.03}{0.05} = -0.6 \quad \& \quad \cos\phi = \frac{0.04}{A} = \frac{0.04}{0.05} = 0.8\,,$$

de donde

$$\tan\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \frac{-0.6}{0.8} = -0.75 \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; \phi_c = \arctan(-0.75) = -0.6435 \text{ rad.}$$

Como $\cos\phi = 0.8 > 0$, entonces $\phi = \phi_c = -0.6435$ rad.
Por lo tanto, la posición de la masa con respecto a su posición de equilibrio es

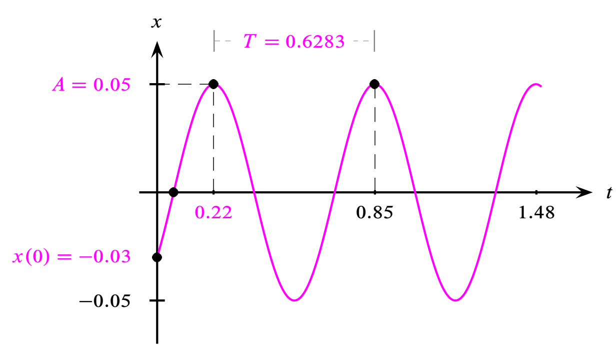
$$x(t) = 0.05\operatorname{sen}(10t - 0.6435) \text{ m.}$$

La amplitud es	$A = 0.05$ m.
El periodo es	$T = \dfrac{2\pi}{10}$ s $= \dfrac{\pi}{5}$ s ≈ 0.6283 s.
La frecuencia de oscilación es	$f = \dfrac{1}{T}$ H$= \dfrac{5}{\pi}$ H.
El ángulo de fase es	$\phi = -0.6435$ rad.
El desfasamiento es	$\dfrac{\phi}{w} = -0.06444$ s.

La velocidad instantánea de la masa es

$$v(t) = x'(t) = 0.5\cos(10t - 0.6435) \text{ m/s.}$$

Considerando lo anterior construimos la gráfica de la posición, que se muestra en la siguiente figura:



□

Ejemplo 5.2.3 *Cuando se aplica a un resorte una fuerza de* 28.8 *N, éste se estira* 0.2 *m. Un cuerpo de masa* 9 *kg se une al extremo libre de dicho resorte y es puesto en movimiento con posición inicial* $x(0) = 0.1$ *m y velocidad inicial* $v(0) = -0.4$ *m/s. Encuentre la amplitud, la frecuencia natural, la frecuencia de oscilación y el periodo del movimiento resultante.*

▼ En este caso, primero se determina la constante del resorte. Para ello basta con utilizar la ley de Hooke, $F_R = -kx$, con los datos $F = 28.8$ N y con $x = 0.2$ m; tenemos entonces que

$$F + F_R = 0 \;\Rightarrow\; 28.8 - k(0.2) = 0, \quad \text{de donde} \quad k = 144 \text{ N/m.}$$

La ecuación diferencial que modela la posición $x(t)$ de la masa es:

$$9\frac{d^2x}{dt^2} + 144x = 0,$$

cuya ecuación característica es $r^2 + 16 = 0$. Las soluciones de esta ecuación algebraica son $r = \pm 4i$. Entonces, dos soluciones linealmente independientes son

$$x_1(t) = \cos 4t \quad \& \quad x_2(t) = \operatorname{sen} 4t.$$

Y la solución general es

$$x(t) = c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t.$$

La velocidad de la masa es, derivando la función anterior,

$$v(t) = -4c_1 \operatorname{sen} 4t + 4c_2 \cos 4t.$$

Utilizando las condiciones iniciales tenemos:

$$\begin{aligned} 0.1 &= x(0) = c_1 \cos(0) + c_2 \operatorname{sen}(0) = c_1; \\ -0.4 &= v(0) = -4c_1 \operatorname{sen}(0) + 4c_2 \cos(0) = 4c_2. \end{aligned}$$

De donde:

$$c_1 = 0.1 \quad \& \quad c_2 = -0.1\,.$$

Entonces:

$$x(t) = 0.1 \cos 4t - 0.1 \operatorname{sen} 4t.$$

Considerando que

$$x(t) = A \operatorname{sen}(4t + \phi) = A(\operatorname{sen} 4t \cos\phi + \operatorname{sen}\phi \cos 4t) = (A\cos\phi)\operatorname{sen} 4t + (A\operatorname{sen}\phi)\cos 4t,$$

se debe cumplir que $A\operatorname{sen}\phi = c_1 = 0.1$ y que $A\cos\phi = c_2 = -0.1$;

de donde $A = \sqrt{(0.1)^2 + (-0.1)^2} = 0.1414$; $\operatorname{sen}\phi = 0.7072$ y $\cos\phi = -0.7072$.

Además $\tan\phi = \dfrac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \dfrac{0.7072}{-0.7072} = -1 \;\Rightarrow\; \phi_c = \arctan(-1) = -\dfrac{\pi}{4}$.

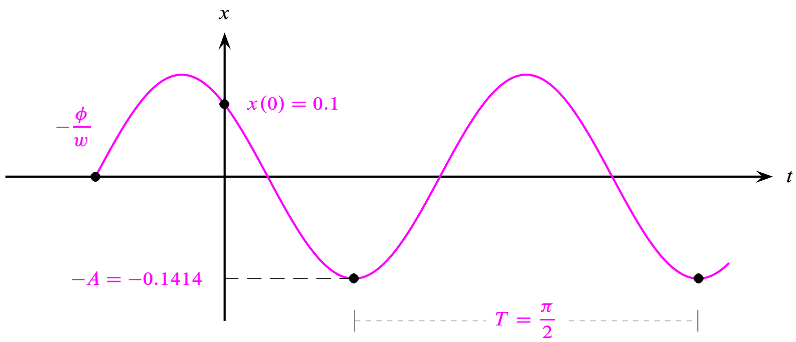
Pero $\cos\phi = -0.1 < 0 \;\Rightarrow\; \phi = \phi_c + \pi = -\dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{3}{4}\pi = 2.3562$ rad.

Por lo tanto:

$$x(t) = A\operatorname{sen}(4t + \phi) = (0.1414)\operatorname{sen}\left(4t + \frac{3\pi}{4}\right) \text{ m}.$$

La amplitud es	$A = 0.1414$ m.
La frecuencia natural es	$w = 4$ rad/s.
El periodo es	$T = \dfrac{2\pi}{4}$ s $= \dfrac{\pi}{2}$ s.
La frecuencia de oscilación es	$f = \dfrac{1}{T}$ H $= \dfrac{2}{\pi}$ H.
El ángulo de fase es	$\phi = 2.3562$ rad.

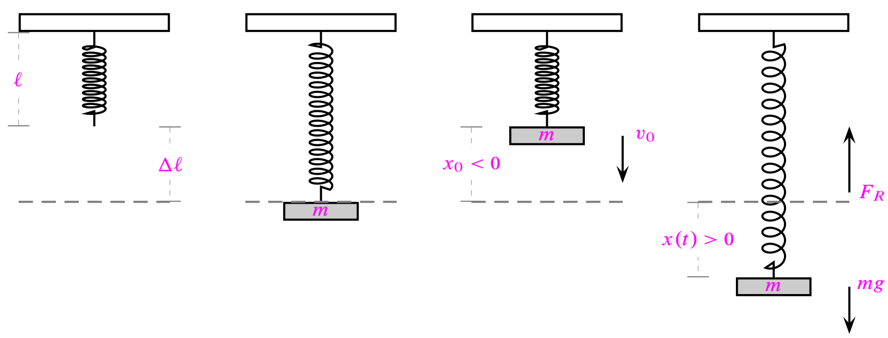
La gráfica de la posición $x(t)$ se ve en la figura siguiente:



□

Caso de un resorte colocado verticalmente

Los problemas anteriores trataron de oscilaciones horizontales.
¿Qué sucede cuando el resorte se coloca verticalmente?
Supongamos que se tiene un resorte colocado verticalmente con su extremo superior fijo. Al colocar un cuerpo de masa m en su extremo libre, el resorte sufre una deformación en su longitud ℓ. Sea $\Delta\ell$ la longitud de la deformación del resorte al quedar la masa m en reposo, esto es, al estar m en su posición de equilibrio. En esta posición ocurre que $-k\Delta\ell + mg = 0$, de donde se puede determinar el valor de la constante del resorte, a saber: $k = \dfrac{mg}{\Delta\ell}$.
Al colocar m en una posición inicial x_0 e imprimirle una velocidad inicial v_0, m tiende a oscilar en torno a su posición de equilibrio.
En la siguiente figura se muestra un esquema del resorte vertical.



Las dos fuerzas que en todo momento actúan sobre la masa m son la fuerza del resorte F_R y la fuerza de la gravedad mg. Cuando el resorte está alargado, ambas fuerzas apuntan en sentidos diferentes; y cuando el resorte está comprimido, apuntan en el mismo sentido.
Si tomamos como origen de coordenadas a la posición de equilibrio y la dirección positiva del eje vertical hacia abajo, entonces, de acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza total es

$$mx''(t) = mg - k[x(t) + \Delta l] \;\Rightarrow\; mx''(t) = mg - kx(t) - k\Delta\ell \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\; mx''(t) + kx(t) = mg - k\Delta\ell \;\Rightarrow\; mx''(t) + kx(t) = 0, \quad \text{ya que } \; mg = k\Delta\ell.$$

Luego, la posición $x(t)$ de m con respecto a su posición de equilibrio está dada, de nuevo, por la solución del PVI:

$$mx''(t) + kx(t) = 0, \quad \text{con } x(0) = x_0 \quad \& \quad x'(0) = v_0.$$

Ejemplo 5.2.4 *Un resorte cuelga verticalmente de un techo, el resorte se elonga un centímetro cuando se coloca una masa de* 1.5 *kg y después el sistema queda en equilibrio. Posteriormente se elonga el resorte una cantidad adicional de* 1.5 *cm y se suelta a partir del reposo. Determine la constante del resorte, la posición y la velocidad de la masa en el tiempo* $t \geq 0$. *¿Cuál es la frecuencia de oscilaciones de la masa y la amplitud del movimiento?*

▼ Cuando el resorte se elonga 0.01 m, el sistema está en equilibrio; esto significa que

$$k\Delta\ell = mg, \quad \text{de donde} \quad k = \frac{mg}{\Delta\ell} = \frac{1.5\,\text{kg}\cdot 9.8\,\text{m/s}^2}{0.01\,\text{m}} = 1\,470\,\text{N/m}.$$

La posición $x(t)$ de la masa m, con respecto a su posición de equilibrio, está dada por la solución del PVI

$$1.5x''(t) + 1\,470x = 0, \quad \text{con } x(0) = 0.015 \quad \& \quad x'(0) = 0.$$

La ecuación característica de la ED es, en este caso,

$$1.5r^2 + 1\,470 = 0 \;\Rightarrow\; r^2 + 980 = 0,$$

cuyas raíces son, aproximadamente, $r = \pm 31.305i$. Entonces la solución general de la ED y su derivada están dadas por

$$\begin{aligned} x(t) &= c_1\cos(31.305t) + c_2\operatorname{sen}(31.305t);\\ v(t) &= -31.305c_1\operatorname{sen}(31.305t) + 31.305c_2\cos(31.305t). \end{aligned}$$

Calculemos ahora los coeficientes c_1 & c_2 utilizando para ello las condiciones iniciales $x_0 = 0.015$ y $v_0 = 0$. Sustituyendo en las ecuaciones anteriores se tiene:

$$\begin{aligned} 0.015 &= x(0) = c_1\cos(0) + c_2\operatorname{sen}(0) = c_1;\\ 0 &= v(0) = -31.305c_1\operatorname{sen}(0) + 31.305c_2\cos(0) = 31.305c_2. \end{aligned}$$

Finalmente, usando los valores de los coeficientes $c_1 = 0.015$ & $c_2 = 0$ en las expresiones para la posición y la velocidad obtenemos:

$$x(t) = 0.015\cos(31.305t)\,\text{m} \quad \& \quad v(t) = -0.4695\operatorname{sen}(31.305t)\,\text{m/s}.$$

Esta función $x(t)$ tiene frecuencia natural $w = 31.305$ rad/s y periodo $T = \dfrac{2\pi}{w} = \dfrac{2\pi}{31.305} = 0.2007$ s. Es decir, la masa realizará aproximadamente $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{31.305}{2\pi} \approx 4.9823 \approx 5$ oscilaciones en un segundo y la amplitud es $A = 0.015$ m.

□

Ejemplo 5.2.5 *Un sistema masa-resorte está colocado en forma vertical. La masa del cuerpo es de 9 kg y la constante del resorte es 25 N/m. Al inicio la masa se libera desde un punto que está a 4 cm arriba de la posición de equilibrio imprimiéndole una velocidad hacia abajo de 2 m/s.*

1. *¿Cuántos ciclos completos habrá completado la masa al final de 20 s?*
2. *¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo por segunda vez? ¿Cuál es su velocidad instantánea en ese momento?*
3. *¿En qué instante la masa alcanza sus desplazamientos extremos ya sea arriba o abajo de la posición de equilibrio?*
4. *¿Cuál es la posición, la velocidad y la aceleración de la masa a los 10 s?*

▼ Los datos en el problema son: $m = 9$ kg; $k = 25$ N/m; $x_0 = -4$ cm y $v_0 = 2$ m/s.
Si $x(t)$ es la posición instantánea (en metros) de la masa m, con respecto a su posición de equilibrio, al cabo de t segundos, entonces $x(t)$ está dada por la solución del PVI

$$mx''(t) + kx(t) = 0, \quad \text{con } x(0) = x_0, \quad \& \quad x'(0) = v_0;$$

$$9x''(t) + 25x(t) = 0, \quad \text{con } x(0) = -0.04, \quad \& \quad x'(0) = 2.$$

Para resolver el problema proponemos $x(t) = e^{rt}$ como solución de la ED, así se obtiene:

$$9x''(t) + 25x(t) = 0 \Rightarrow 9r^2 + 25 = 0 \Rightarrow r^2 = -\frac{25}{9} \Rightarrow r = \pm\sqrt{-\frac{25}{9}} \Rightarrow r = \pm\frac{5}{3}i.$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$x(t) = c_1 \cos\left(\frac{5}{3}t\right) + c_2 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t\right),$$

y la velocidad instantánea es

$$v(t) = x'(t) = -\frac{5}{3}c_1 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t\right) + \frac{5}{3}c_2 \cos\left(\frac{5}{3}t\right).$$

Aplicando las condiciones iniciales:

$$x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0 = -0.04 \Rightarrow c_1 = -0.04;$$
$$x'(0) = -\frac{5}{3}c_1 \operatorname{sen} 0 + \frac{5}{3}c_2 \cos 0 = 2 \Rightarrow c_2 = \frac{6}{5} = 1.2\,.$$

De manera que la posición instantánea es

$$x(t) = -0.04 \cos\left(\frac{5}{3}t\right) + 1.2 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t\right) \text{ m},$$

y la velocidad instantánea es

$$v(t) = x'(t) = 0.0667 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t\right) + 2 \cos\left(\frac{5}{3}t\right) \text{ m/s}.$$

Para obtener a $x(t) = A \operatorname{sen}(wt + \phi)$, calculamos la amplitud :

$$A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} = \sqrt{(-0.04)^2 + (1.2)^2} = 1.2007.$$

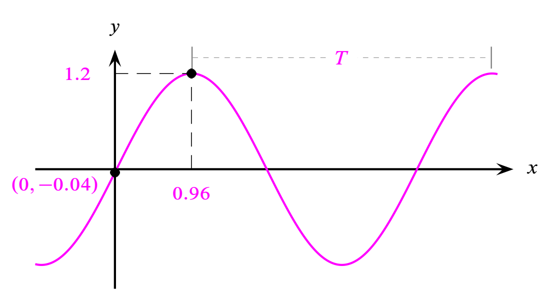
El ángulo de fase ϕ está dado por

$$A \operatorname{sen}\phi = -0.04 \quad \& \quad A\cos\phi = 1.2,$$
$$\operatorname{sen}\phi = \frac{-0.04}{A} = -0.0333 \quad \& \quad \cos\phi = \frac{1.2}{A} = 0.9994,$$
$$\tan\phi = \frac{\operatorname{sen}\phi}{\cos\phi} = \frac{-0.0333}{0.9994} = -0.0333,$$
$$\phi_c = \arctan(-0.0333) \Rightarrow \phi_c = -0.0333.$$

No hay cambio en el valor de ϕ debido a que $\cos\phi > 0$.
Por lo tanto, la posición instantánea es

$$x(t) = A \operatorname{sen}(wt + \phi) = 1.201 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) \text{ m}.$$

Y su gráfica:



Usando lo anterior podemos obtener los siguientes resultados:

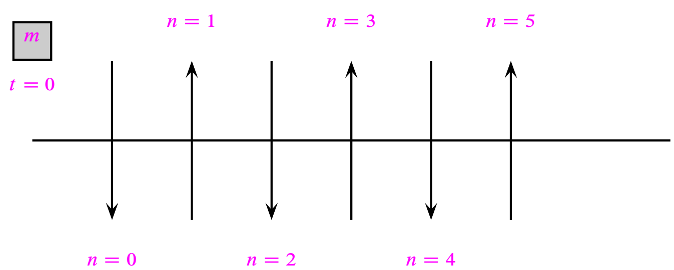
1.

El periodo es	$T = \dfrac{2\pi}{w}\,\text{s} = \dfrac{6\pi}{5}\,\text{s} = 3.7699\,\text{s}.$
La frecuencia de oscilación es	$f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{3.7699} \approx 0.2653\,\text{osc/s}.$
El total de oscilaciones en 20 s es	$20 \cdot f = 20(0.2653) \approx 5.3\,\text{osc}.$

2. La masa m pasa por la posición de equilibrio cuando:

$$
\begin{aligned}
x(t) = 0 \;\Rightarrow\; 1.201\,\text{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) = 0 \;\Rightarrow\; \text{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) = 0 \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; \frac{5}{3}t - 0.0333 = n\pi, \quad \text{con } n \text{ entero} \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; t = \frac{3}{5}(n\pi + 0.0333), \quad \text{con } n \text{ entero y con } t \geq 0 \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; t = \frac{3}{5}(n\pi + 0.0333), \quad \text{con } n = 0, 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

Considerando la posición inicial x_0 de m se tiene que



La masa m pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo cuando:

$$
\begin{aligned}
n = 0 \;\Rightarrow\; t &= \frac{3}{5}(0\pi + 0.0333)\,\text{s} = 0.01999\,\text{s} \approx 0.02\,\text{s}.\\
n = 2 \;\Rightarrow\; t &= \frac{3}{5}(2\pi + 0.0333)\,\text{s} = 3.7899\,\text{s} \approx 3.79\,\text{s}.\\
n = 4 \;\Rightarrow\; t &= \frac{3}{5}(4\pi + 0.0333)\,\text{s} = 7.5598\,\text{s} \approx 7.56\,\text{s}.
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente.

La masa m pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia arriba cuando:

$$
\begin{aligned}
n = 1 \;\Rightarrow\; t &= \frac{3}{5}(\pi + 0.0333)\,\text{s} = 1.9049\,\text{s} \approx 1.90\,\text{s}.\\
n = 3 \;\Rightarrow\; t &= \frac{3}{5}(3\pi + 0.0333)\,\text{s} = 5.6749\,\text{s} \approx 5.67\,\text{s}.\\
n = 5 \;\Rightarrow\; t &= \frac{3}{5}(5\pi + 0.0333)\,\text{s} = 9.4448\,\text{s} \approx 9.44\,\text{s}.
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente.

Entonces, la masa m pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo por segunda vez en el instante $t \approx 3.79$ s y su velocidad en ese momento es $v(3.79) = 0.5968$ m/s.

3. Por otra parte, la masa m alcanza sus desplazamientos extremos cuando:

$$
\begin{aligned}
|\,x(t)\,| = A \;\Rightarrow\; x(t) = \pm A \;\Rightarrow\; A \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) = \pm A \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) = \pm 1 \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; \frac{5}{3}t - 0.0333 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad \text{con } n \text{ entero} \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; \frac{5}{3}t = (2n+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333, \quad \text{con } n \text{ entero y con } t \geq 0 \;\Rightarrow\\
\Rightarrow\; t = \frac{3}{5}\left[(2n+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333\right], \quad \text{con } n = 0, 1, 2, \cdots
\end{aligned}
$$

De aquí que la masa m alcanza sus desplazamientos extremos cuando:

$$
\begin{aligned}
n = 0 \;\Rightarrow\; t &= \frac{3}{5}\left[(0+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333\right] \text{ s } \approx 0.96 \text{ s.}\\
n = 1 \;\Rightarrow\; t &= \frac{3}{5}\left[(2+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333\right] \text{ s } \approx 2.85 \text{ s.}\\
n = 2 \;\Rightarrow\; t &= \frac{3}{5}\left[(4+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333\right] \text{ s } \approx 4.73 \text{ s.}\\
n = 3 \;\Rightarrow\; t &= \frac{3}{5}\left[(6+1)\frac{\pi}{2} + 0.0333\right] \text{ s } \approx 6.62 \text{ s.}
\end{aligned}
$$

y así sucesivamente.

4. Finalmente, la posición, la velocidad y la aceleración a los 10 s se obtienen evaluando $x(t)$, $v(t) = x'(t)$ & $a(t) = x''(t)$ en $t = 10$. Obtenemos:

$$
x(t) = 1.201 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right), \; v(t) = 2.002 \cos\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right) \;\&\; a(t) = -3.3367 \operatorname{sen}\left(\frac{5}{3}t - 0.0333\right).
$$

Entonces:

$$
\begin{aligned}
x(10) &= 1.201 \operatorname{sen}\left(\frac{50}{3} - 0.0333\right) \text{ m } = -0.9594 \text{ m .}\\
v(10) &= 2.002 \cos\left(\frac{50}{3} - 0.0333\right) \text{ m/s } = -1.2043 \text{ m/s.}\\
a(10) &= -3.3367 \operatorname{sen}\left(\frac{50}{3} - 0.0333\right) \text{ m/s}^2 = 2.6656 \text{ m/s}^2.
\end{aligned}
$$

Esto es,

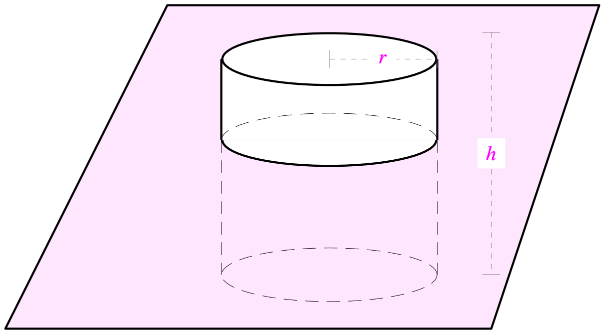
$$
x(10) \approx -0.96 \text{ m}, \quad v(10) \approx -1.2 \text{ m/s} \quad \& \quad a(10) \approx 2.67 \text{ m/s}^2;
$$

lo que significa que a los 10 s la masa m está a 0.96 m arriba de la posición de equilibrio, dirigiéndose hacia arriba con una rapidez de 1.2 m/s y con una aceleración dirigida hacia abajo de 2.67 m/s^2.

□

Los siguientes ejemplos tratan con sistemas que no son exactamente masa-resorte, pero su análisis es similar y las respuestas que obtendremos también.

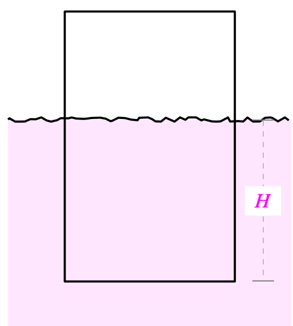
Ejemplo 5.2.6 *Una boya cilíndrica de radio r, altura h y densidad ρ_{boya} se encuentra flotando en la superficie de un lago, como se muestra en la figura. Inicialmente la boya se encuentra en equilibrio; de repente se sumerge una distancia x_0 y se suelta con velocidad igual a cero. Determine la ecuación diferencial que modela el sistema y su solución. Si la boya tiene dimensiones $h = 1$ m, $r = 0.5$ m, y su densidad es $\rho = 500$ kg/m^3, determine la posición y la velocidad de la boya en todo tiempo, si se sumerge una profundidad de $x_0 = 0.01$ m, a partir de la posición en equilibrio. Recuerde que $g = 9.8$ m/s^2 y que $\rho_{agua} = 1\,000$ kg/m^3.*



▼ De acuerdo con el principio de flotación de Arquímedes, la boya se encuentra en equilibrio cuando la fuerza de flotación es igual al peso de la boya. Por una parte, el volumen que ocupa la boya es $V = \pi r^2 h$ y su peso es igual a

$$w_{\text{boya}} = m_{\text{boya}} g = \rho_{\text{boya}} V g = \rho_{\text{boya}} \pi r^2 h g.$$

Por otra parte, supongamos que la boya está en equilibrio cuando se encuentra sumergida una altura H.



Como la fuerza de flotación es igual al peso del líquido desplazado, tenemos que

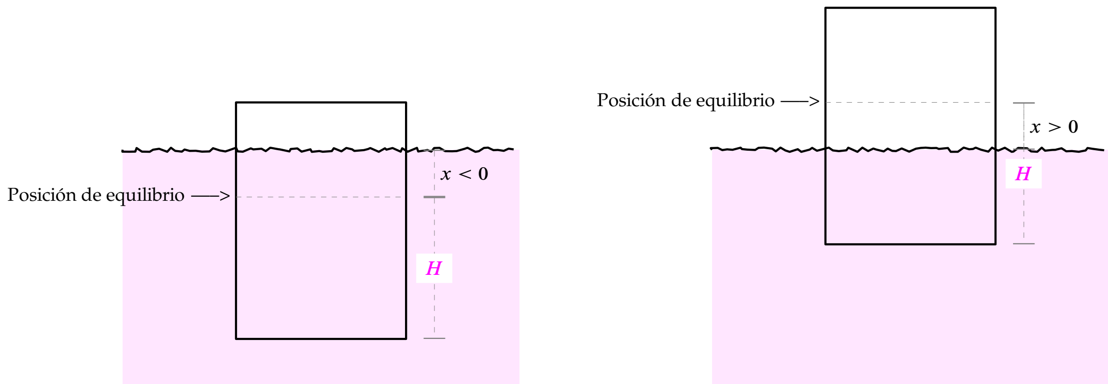
$$F_{\text{flot}} = m_{\text{agua}} g = \rho_{\text{agua}} V_{\text{despl}} g = \rho_{\text{agua}} \pi r^2 H g.$$

Igualando las dos últimas expresiones, podemos obtener la altura H que se sumerge la boya cuando se encuentra en equilibrio.

$$w_{\text{boya}} = F_{\text{flot}} \;\Rightarrow\; \rho_{\text{agua}} \pi r^2 H g = \rho_{\text{boya}} \pi r^2 h g \;\Rightarrow\; \rho_{\text{agua}} H = \rho_{\text{boya}} h \;\Rightarrow\; H = \frac{\rho_{\text{boya}} h}{\rho_{\text{agua}}}.$$

Ahora, sobre esta distancia H, sumergimos la boya una altura adicional x_0 y la soltamos con velocidad $v_0 = 0$. Entonces la fuerza de flotación ya no es igual al peso, el sistema deja de estar en equilibrio y empieza a oscilar.

En cualquier momento la posición de equilibrio se encuentra una distancia x con respecto al agua, como se muestra en la figura:



Suponemos que x es negativa cuando la posición de equilibrio de la boya está sumergida una distancia x; es positiva cuando dicha posición de equilibrio se encuentra a una distancia x arriba del agua.
La fuerza que siente la boya en cualquier momento es ahora:

$$F = F_{\text{flot}} - m_{\text{boya}}g = \rho_{\text{agua}}\pi r^2(H-x)g - \rho_{\text{boya}}\pi r^2 hg = -\rho_{\text{agua}}\pi r^2 xg.$$

De acuerdo con la segunda ley de Newton, $F = ma$, el movimiento de la boya se describe, a partir de la posición en equilibrio, por medio de

$$m_{\text{boya}}\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho_{\text{agua}}\pi r^2 xg \Rightarrow \rho_{\text{boya}}\pi r^2 h\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho_{\text{agua}}\pi r^2 xg \Rightarrow \rho_{\text{boya}}h\frac{d^2x}{dt^2} = -\rho_{\text{agua}}xg.$$

Que se puede reescribir como

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{\rho_{\text{agua}}g}{\rho_{\text{boya}}h}\right)x = 0.$$

Esta ecuación diferencial es del tipo masa-oscilador que hemos estado estudiando. La frecuencia natural es

$$w = \sqrt{\frac{\rho_{\text{agua}}g}{\rho_{\text{boya}}h}}.$$

La solución general es, entonces:

$$x(t) = c_1\cos wt + c_2\,\text{sen}\,wt.$$

Y la velocidad con la que mueve la boya es

$$v(t) = -c_1 w\,\text{sen}\,wt + c_2 w\cos wt.$$

Finalmente, si suponemos que $x(0) = -x_0$ y que $v(0) = 0$, obtenemos $c_1 = -x_0$ así como $c_2 = 0$. Utilizando estos dos resultados, se obtiene la forma de la oscilación de la boya.

$$x(t) = -x_0\cos wt.$$

Para el caso en que $h = 1$ m, $r = 0.5$ m, $\rho = 500\ \text{kg/m}^3$, $x_0 = 0.01$ m y considerando que $\rho_{\text{agua}} = 1\,000\ \text{kg/m}^3$, se tiene que

$$w = \sqrt{\frac{(1\,000)(9.8)}{(500)(1)}} = 4.4272.$$

Por lo que la posición de la boya dadas las condiciones iniciales es

$$x(t) = -0.01\cos(4.4272t)\ \text{m},$$

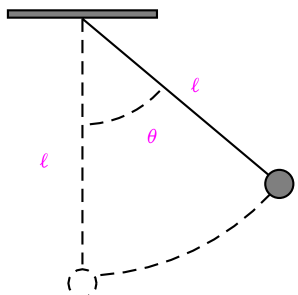
y la velocidad es

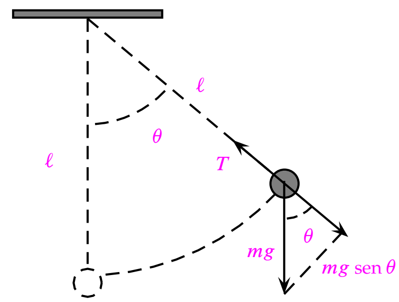
$$v(t) = x'(t) = 0.0443\,\text{sen}(4.4272t)\ \text{m/s}.$$

□

Ejemplo 5.2.7 *Un péndulo de masa $m = 2$ kg y de longitud ℓ igual a 2.45 m está suspendido sobre un marco horizontal, como se ilustra en la figura. El péndulo se levanta un ángulo de $10°$ y se suelta con una velocidad angular de -0.4 rad/s.*

1. *¿Cuántos ciclos (oscilaciones) completos habrá completado el péndulo después de 10 s?*
2. *¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con velocidad angular positiva por tercera vez?*
3. *¿En qué instantes la masa alcanza sus desplazamientos extremos?*
4. *¿Cuál es la posición de la masa del péndulo en cualquier tiempo?*
5. *¿Cuál es la posición de la masa a los 10 s?*





▼ Primero se determina la ecuación diferencial del movimiento; para ello se considera el diagrama de fuerzas que se muestra en la figura. Las dos únicas fuerzas que actúan sobre la masa son la tensión T de la cuerda que se considera rígida y el peso mg del cuerpo. En la dirección del segmento que une el punto de soporte del péndulo con la masa (dirección radial), la fuerza neta es cero, ya que en esa dirección la masa está en equilibrio.

Por otra parte, en la dirección del movimiento del péndulo (dirección tangencial) sólo actúa la componente tangencial del peso, que es $-mg \operatorname{sen}\theta$.

De acuerdo con la segunda ley de Newton, tenemos en la dirección tangencial:

$$ma_{tan} = -mg \operatorname{sen}\theta,$$

donde la aceleración a_{tan} se relaciona con el ángulo θ de acuerdo con

$$a_{tan} = \ell\alpha = \ell\frac{d^2\theta}{dt^2},$$

donde α es la aceleración angular. Reuniendo estos dos últimos resultados:

$$m\ell\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \operatorname{sen}\theta,$$

de donde:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\operatorname{sen}\theta = 0.$$

Para ángulos pequeños, donde es posible suponer que $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$, obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0.$$

Observe que no importa el valor de la masa m, ya que la ecuación diferencial no depende de ella. Al usar los valores de la longitud de la cuerda $\ell = 2.45$ m y de la constante $g = 9.8$ m/s^2, obtenemos:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 4\theta = 0.$$

La solución de esta ecuación diferencial es

$$\theta(t) = c_1 \cos 2t + c_2 \operatorname{sen} 2t.$$

La velocidad angular $\theta'(t)$ se obtiene derivando esta expresión. Tenemos entonces que

$$\theta'(t) = -2c_1 \operatorname{sen} 2t + 2c_2 \cos 2t.$$

Las condiciones iniciales del problema son

$$\theta(0) = 10^\circ = 10\Big(\frac{\pi}{180}\Big) \text{ rad } = \frac{\pi}{18} \text{ rad } \approx 0.1745 \text{ rad } \ \& \ \theta'(0) = -0.4 \text{ rad/s}.$$

Tomando esto en cuenta, y usando las dos expresiones anteriores, tenemos:

$$c_1 = \frac{\pi}{18} \approx 0.1745 \quad \& \quad c_2 = -0.2 = -\frac{1}{5}\,.$$

De manera que

$$\theta(t) = \frac{\pi}{18}\cos 2t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2t = 0.1745 \cos 2t - 0.2 \operatorname{sen} 2t.$$

Para reescribir $\theta(t)$ en la forma $\theta(t) = A \operatorname{sen}(wt + \phi)$, se considera que

$$\theta(t) = A \operatorname{sen} wt \cos\phi + A \cos wt \operatorname{sen}\phi.$$

La amplitud es $A = \sqrt{(0.1745)^2 + (-0.2)^2} = 0.2654$. El ángulo de fase ϕ está dado por

$$A \operatorname{sen}\phi = 0.1745 \quad \& \quad A\cos\phi = -0.2\,.$$

Entonces, $\tan\phi = \dfrac{0.1745}{-0.2} = -0.8725 \Rightarrow \phi_c = \arctan(-0.8725) = -0.7174$; y debido a que $\cos\phi < 0$:

$$\phi = \phi_c + \pi = -0.7174 + \pi = 2.4242.$$

De forma que el ángulo θ en el tiempo t es

$$\theta(t) = 0.2654 \operatorname{sen}(2t + 2.4242) \text{ rad}.$$

y la velocidad angular es

$$\theta'(t) = 0.5308 \cos(2t + 2.4242) \text{ rad/s}.$$

Estamos ahora en condiciones de responder las preguntas de este ejemplo:

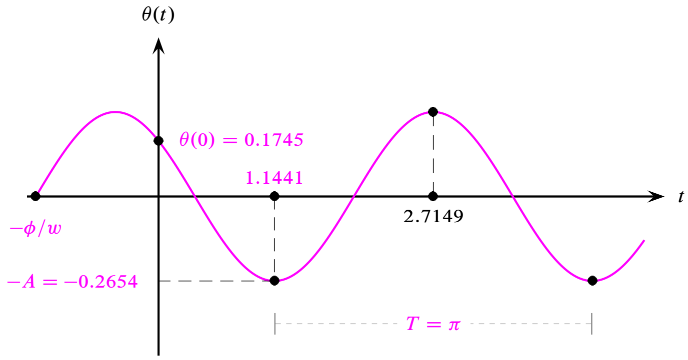
1. Como el periodo es de $T = \dfrac{2\pi}{w} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ s, entonces en 10 s se realizan $\dfrac{10}{\pi} \approx 3$ oscilaciones (o ciclos) completas.

2. La masa pasa por la posición de equilibrio cuando $\theta(t) = 0$; esto ocurre cuando

   $$\operatorname{sen}(2t + 2.4242) = 0 \Rightarrow 2t + 2.4242 = n\pi,\ n \text{ entero y } t \geq 0 \Rightarrow t = \frac{n\pi - 2.4242}{2}, \text{ con } n = 1, 2, 3, \ldots$$

   Observe que, para valores impares de n, la velocidad angular está dada por $\theta'(t) = -0.5308$ rad/s. Así que la tercera vez que se cruza la posición de equilibrio con velocidad angular negativa ocurre cuando $n = 5$, es decir, cuando $t \approx 6.6419$ s.

   La siguiente es la gráfica de $\theta(t)$:



3. Por otra parte, el péndulo obtiene sus valores extremos o de retorno cuando la velocidad angular es cero. Es decir, cuando

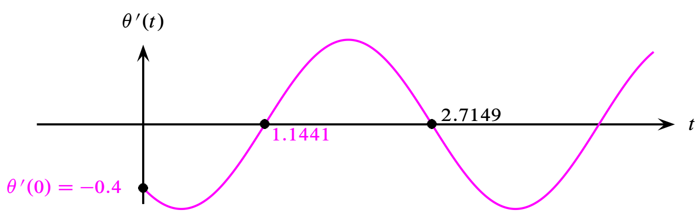
$$\cos(2t + 2.4242) = 0 \;\Rightarrow\; 2t + 2.4242 = \frac{\pi}{2} + n\pi, \text{ con } n \text{ entero y con } t \geq 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; 2t = (2n+1)\frac{\pi}{2} - 2.4242 \;\Rightarrow\; t = \frac{(2n+1)\pi}{4} - 1.2121, \text{con } n = 1, 2, 3, \cdots$$

O sea, que

$$t = 1.1441 \text{ s}; 2.7149 \text{ s}; 4.2857 \text{ s};\ \text{ y así sucesivamente.}$$

La siguiente es la gráfica de $\theta'(t)$:



4. Las coordenadas cartesianas de la masa del péndulo con respecto a un sistema de coordenadas con origen en el punto de soporte es (nuevamente observe la figura):

$$x(t) = l\,\text{sen}[\theta(t)] = 2.45\,\text{sen}[0.2654\,\text{sen}(2t + 2.4242)] \text{ m.}$$
$$y(t) = -l\cos[\theta(t)] = -2.45\cos[0.2654\,\text{sen}(2t + 2.4242)] \text{ m/s.}$$

5. Finalmente, la posición de la masa a los 10 s se obtiene evaluando las funciones anteriores; así tenemos que

$$\theta(10) = 0.2654\,\text{sen}(22.4242) \approx -0.1114 \text{ rad.}$$
$$x(10) = l\cos[\theta(10)] = 2.45\cos(-0.1114) \approx 2.4348 \text{ m.}$$
$$y(t) = -l\,\text{sen}[\theta(10)] = -2.45\,\text{sen}(-0.1114) \approx 0.2724 \text{ m.}$$

□

Ejercicios 5.2.1 *Movimiento armónico simple. Soluciones en la página* **??**

1. Un resorte de constante k está conectado en uno de sus extremos a un cuerpo de masa m y en el otro a una pared. El sistema masa-resorte descansa sobre una mesa horizontal sin fricción. Determine la posición en la forma $x(t) = A\,\text{sen}(wt + \phi)$ y la velocidad del cuerpo con las condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$.

   a. $m = 0.5$ kg, $k = 8$ N/m, $x(0) = 0$ m, $v(0) = 2$ m/s.

b. $m = 2.5$ kg, $k = 10$ N/m, $x(0) = 0.1$ m, $v(0) = -1.2$ m/s.

2. Un cuerpo de masa m está unido al extremo de un resorte estirado una distancia d por una fuerza F. El cuerpo es puesto en movimiento en una posición inicial $x(0) = x_0$ y con velocidad inicial $v(0) = v_0$. Encuentre la amplitud, la frecuencia angular, la frecuencia y el periodo del movimiento resultante. Determine la posición en la forma $x(t) = A\,\text{sen}(wt + \phi)$ y la velocidad .

    a. $m = 4$ kg, $d = 0.2$ m, $F = 15$ N, $x(0) = 0.6$ m, $v(0) = 1.5$ m/s.

    b. $m = 4$ kg, $d = 0.25$ m, $F = 100$ N, $x(0) = 0.1$ m, $v(0) = -1$ m/s.

3. Una masa m igual a 32 kg se suspende verticalmente de un resorte y, por esta razón, éste se alarga 39.2 cm. Determine la amplitud y el periodo de movimiento, si la masa se libera desde un punto situado 20 cm arriba de la posición de equilibrio con una velocidad ascendente de 1 m/s. ¿Cuántos ciclos habrá completado la masa al final de 40 s? Suponga $g = 9.8$ m/s^2.

4. Una masa de 9 kg alarga un resorte 9.8 cm; el sistema masa-resorte se encuentra suspendido verticalmente. La masa se libera desde el reposo de un punto situado 5 cm debajo de la posición de equilibrio.

    a. Encuentre la posición de la masa en los tiempos $t = 5$ y 10 s.

    b. ¿Cuál es la velocidad de la masa cuando t es igual a 12 s? ¿En qué dirección se dirige en ese instante?

    c. ¿En qué tiempos la masa pasa por la posición de equilibrio?

    d. ¿En qué tiempos tiene el resorte su máxima compresión y su máxima elongación?

5. Una fuerza de 4 N alarga un resorte 4 cm. En el extremo del resorte colocado verticalmente se pone una masa de 25 kg y se libera el sistema desde su posición de equilibrio con una velocidad hacia arriba de 10 m/s. Encuentre la ecuación de movimiento.

6. Un resorte con constante de 20 N/m se suspende verticalmente de un soporte y se coloca una masa de 20 kg. El sistema se libera desde la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 10 m/s.

    a. Determine la amplitud, la frecuencia angular y el periodo del movimiento.

    b. Calcule la posición y la velocidad en todo tiempo t.

    c. ¿Cuál es la máxima velocidad de la masa? ¿Qué pasa con la aceleración en ese instante?

7. Una masa de 0.4 kg se une a un resorte de constante 3.6 N/m. Determine la ecuación de movimiento, si la masa se libera inicialmente desde un punto 15 cm debajo de la posición de equilibrio con una velocidad de 0.45 m/s hacia abajo.

8. Una masa de 40 kg alarga un resorte 9.8 cm. Al inicio, la masa se libera desde un punto que está 40 cm arriba de la posición de equilibrio con una velocidad descendente de 4 m/s.

    a. ¿Cuáles son la amplitud, la frecuencia angular y el periodo del movimiento?

    b. ¿Cuántos ciclos (completos) habrá completado la masa al final de 3 s?

    c. ¿En qué momento la masa pasa por la posición de equilibrio con dirección hacia abajo por sexta vez?

    d. ¿Cuál es la velocidad y la aceleración en ese instante?

    e. ¿En qué instantes la masa alcanza sus desplazamientos extremos en cualquier lado de la posición de equilibrio?

    f. ¿Cuál es la posición, velocidad y aceleración en los tiempos $t = 5,\ 10,\ 15,\ 20$ y 25 s?

    g. ¿En qué instantes la masa está a 0.40 m abajo de la posición de equilibrio?

9. Determine ángulo y la velocidad angular en el tiempo de un péndulo con las condiciones siguientes. Suponga que $g = 9.8$ m/s^2.

a. $\ell = 0.098$ m, $m = 0.5$ kg, $\theta(0) = 0$ rad, $\theta'(0) = 0.02$ rad/s.

b. $\ell = 0.49$ m, $m = 5$ kg, $\theta(0) = -0.2$ rad, $\theta'(0) = 0$ rad/s.

c. $\ell = 9.8$ m, $m = 2.5$ kg, $\theta(0) = 0.1$ rad, $\theta'(0) = -0.1$ rad/s.

10. Un péndulo de 20 cm de longitud ℓ y de 0.5 kg de masa m oscila. Si en el tiempo $t = 0$, el ángulo y la velocidad angular son $\theta(0) = \dfrac{\pi}{12}$ rad y $\theta'(0) = \dfrac{7\pi}{12}$ rad/s, respectivamente, determinar el periodo de movimiento, la amplitud, el ángulo de fase, $\theta(t)$, $\theta'(t)$ y el primer tiempo para el cual $\theta = 0$ rad.

Ejercicios 5.2.1 *Movimiento armónico simple. Página:* **??**

1. a. $x(t) = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4t$ m;
   $v(t) = 2\cos 4t$ m/s.
   b. $x(t) = 0.6083\operatorname{sen}(2t + 2.9764)$ m;
   $v(t) = 1.2566\cos(2t + 2.9764)$ m/s.
2. a. $A = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}$ m;
   $w = \dfrac{5\sqrt{3}}{2}$ rad/s;
   $T = \dfrac{4\pi}{5\sqrt{3}}$ s;
   $f = \dfrac{5\sqrt{3}}{4\pi}$ osc/s;
   $x(t) = \dfrac{2\sqrt{3}}{5}\operatorname{sen}\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ m;
   $v(t) = 3\cos\left(\dfrac{5\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{\pi}{3}\right)$ m/s.
   b. $A = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$ m;
   $w = 10$ rad/s;
   $T = \dfrac{\pi}{5}$s;
   $f = \dfrac{5}{\pi}$ H;
   $x(t) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(10t + \dfrac{3\pi}{4}\right)$ m;
   $v(t) = \sqrt{2}\cos\left(10t + \dfrac{3\pi}{4}\right)$ m/s.
3. $A = \dfrac{\sqrt{2}}{5}$ m;
   $T = \dfrac{2\pi}{5}$ s;
   $n = 31$ ciclos completos.
4. a. $x(5) = 4.82$ cm; $x(10) = 4.31$ cm;
   b. $v(12) = -0.29$ m/s; la masa se dirige hacia arriba;
   c. $t = \dfrac{(2n+1)\pi}{20}$, con $n = 0, 1, 2, 3, \cdots$;
   d. Máxima compresión en $t = \dfrac{(2n+1)\pi}{10}$,
   con $n = 0, 1, 2, \cdots$;
   máxima elongación en $t = \dfrac{n\pi}{5}$,
   con $n = 0, 1, 2, \cdots$
5. $x(t) = -5\operatorname{sen} 2t$ m.
6. a. $A = 10$; $w = 1$ rad/s; $T = 2\pi$ s;
   b. $x(t) = 10\operatorname{sen} t$; $v(t) = 10\cos t$;
   c. $v_{\text{máx}} = 10$ m/s, $t = 2n\pi$; $n = 0, 1, 2, \cdots$;
   $a(t) = 0$ m/s^2 , $t = 2n\pi$; $n = 0, 1, 2, \cdots$
7. $x(t) = 0.15\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(3t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ m;
   $v(t) = 0.45\sqrt{2}\cos\left(3t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ m/s.
8. a. $A = 0.4\sqrt{2}$ m; $w = 10$ rad/s; $T = \dfrac{\pi}{5}$ s;
   b. $n = \dfrac{3}{T}$; 4 ciclos completos;
   c. $t = \dfrac{41}{40}\pi$ s;
   d. $v = 4\sqrt{2}$ m/s; $a = 0$ m/s^2;
   e. $t = \dfrac{1}{10}\left(\dfrac{3\pi}{4} + n\pi\right)$ s, con $n = 0, 1, 2, \cdots$;
   f.

t	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
5	−0.4909	2.8104	49.0936
10	−0.5475	1.4238	54.7474
15	−0.5657	−0.0625	56.5651
20	−0.5442	−1.5444	54.4194
25	−0.4846	−2.9182	48.4607

;

   g. $t = \dfrac{\pi}{10}\left(2n + \dfrac{1}{2}\right)$ s, con $n = 0, 1, 2, \cdots$;
   $t = \dfrac{\pi}{10}(2n + 1)$ s, con $n = 0, 1, 2, \cdots$
9. a. $\theta(t) = 0.002\operatorname{sen} 10t$ rad;
   $\theta'(t) = 0.02\cos 10t$ rad/s.
   b. $\theta(t) = -\dfrac{1}{5}\cos(2\sqrt{5}t)$ rad;
   $\theta'(t) = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\operatorname{sen}(2\sqrt{5}t)$ rad/s.
   c. $\theta(t) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(t + \dfrac{3\pi}{4}\right)$rad;
   $\theta'(t) = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}\cos\left(t + \dfrac{3\pi}{4}\right)$ rad/s.
10. $A = \dfrac{\pi}{6\sqrt{2}}$ rad. $\phi = \dfrac{\pi}{4}$; $T = \dfrac{2\pi}{7}$ s;
   $\theta(t) = \dfrac{\pi}{6\sqrt{2}}\operatorname{sen}\left(7t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ rad;
   $\theta'(t) = \dfrac{7\pi}{6\sqrt{2}}\cos\left(7t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ rad/s.