

CAPÍTULO

5

Aplicaciones de ED de segundo orden

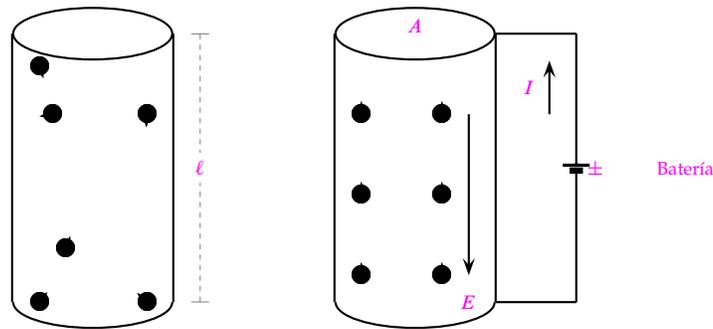
5.3 Circuitos eléctricos

Desde hace más de un siglo, la humanidad ha utilizado en su beneficio la energía eléctrica. Actualmente usamos diferentes aparatos que la necesitan, baste recordar sólo los aparatos electrodomésticos que tenemos en nuestras casas para reconocer que sin ellos nuestra vida sería diferente. La energía eléctrica se transmite de diversas formas, por ejemplo, la instalación eléctrica en nuestras casas transmite la energía por medio de cables de cobre que forman diferentes circuitos. Estos circuitos son los más simples, pero en los aparatos electrónicos (teléfonos celulares, televisiones, etc.) aparecen elementos que almacenan y distribuyen la energía de diversas formas. En esta sección se estudian los conceptos básicos de circuitos y las ED que los modelan. Se inicia con los conceptos de campo eléctrico y diferencia de potencial.

La energía eléctrica se transmite por diversos materiales llamados **conductores**; estos materiales tienen la propiedad de que cargas eléctricas (electrones o iones positivos) libres circulan por ellos en direcciones aleatorias, como los átomos en un gas confinado, y sólo se mueven en una dirección preferencial cuando se coloca una **fuerza de voltaje** o **batería** en los extremos del conductor (véase la siguiente figura). En principio esta fuente de voltaje produce una **diferencia de potencial** V que a su vez produce un campo eléctrico E entre los extremos del conductor, lo que provoca que las cargas Q sean arrastradas en la dirección del campo con una fuerza que experimentalmente es $F = QE$. De forma simple, si la longitud del conductor es ℓ , entonces el campo y la diferencia de potencial se relacionan mediante $E = V/\ell$, de donde la diferencia de potencial está dada por $V = E\ell = F\ell/Q$. Es decir, V se define como la energía necesaria para transportar una distancia ℓ una carga unitaria. En el sistema MKSC [cuyas unidades son metro (m); kilogramo (kg); segundo (s) y coulomb (C)], la unidad del voltaje es el volt (V), que satisface

$$\text{volt (V)} = \text{joule (J)}/\text{coulomb (C)}.$$

En conclusión, una **fuerza de voltaje** es una fuente de energía eléctrica que provoca que se muevan cargas sobre un conductor. Por comodidad, cuando se hable de potencial nos referiremos a lo que hemos llamado diferencia de potencial.



Cuando se establece el campo eléctrico, las cargas ordenan su movimiento y circulan por el conductor estableciendo una corriente eléctrica I . Si una cantidad de carga dQ cruza una sección transversal del conductor en una fracción de tiempo dt , definimos la intensidad de corriente como:

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Como las cargas pueden ser positivas o negativas, es necesario establecer un signo convencional para la dirección de la corriente; la convención usual es seleccionar ésta como la dirección en que se moverían cargas negativas para un campo eléctrico dado E . Por ejemplo, en el caso de la figura anterior se puede observar que la dirección de la corriente se establece del polo negativo al polo positivo de la batería.

Por otra parte, la unidad de la corriente en el sistema MKSC es el amperio (A); como las unidades de la carga y del tiempo son coulombs (C) y segundos (s), respectivamente, tenemos, de acuerdo con la ecuación anterior,

$$\text{ampere (A)} = \text{coulomb (C)}/\text{segundo (s)}.$$

Antes de estudiar propiamente los circuitos eléctricos, necesitamos describir los elementos básicos que los forman; éstos son el resistor, el capacitor y el inductor. Analicemos cada uno de ellos por separado.

Resistor

Un resistor es un dispositivo formado por un material conductor que disipa energía al paso de corriente eléctrica. Si se aplica la misma diferencia de potencial V a los extremos de dos conductores de materiales diferentes, por ejemplo, cobre y aluminio, con la misma geometría (forma y dimensiones), se producen intensidades de corriente I diferentes. La razón se debe a que existe una propiedad de los materiales que se conoce como la **resistencia** R , que se define experimentalmente por medio de

$$R = \frac{V}{I}. \quad (5.1)$$

Para el caso en que la corriente obtenida sea directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicado $I \propto V$, la resistencia R será una constante; los materiales con esta propiedad se llaman materiales óhmicos ya que satisfacen la ley de Ohm:

Ley de Ohm

La intensidad de la corriente eléctrica que circula por un conductor es directamente proporcional a la diferencial de potencial aplicada e inversamente proporcional a la resistencia del mismo.

$$I = \frac{V}{R}.$$

Observe que la expresión (5.1) se cumple siempre independientemente de que el material sea óhmico o no, sólo en el caso de que R sea una constante tendremos que el material cumple con la ley de Ohm. Desde un punto de vista físico, la resistencia depende de las características geométricas del conductor y de una propiedad llamada **resistividad** ρ . Por ejemplo, en el caso de un conductor cilíndrico como el de la figura anterior, de longitud ℓ y área transversal A , se tiene que la resistencia aumenta directamente con la longitud e inversamente con el área, es decir, la resistencia R satisface:

$$R = \rho \frac{\ell}{A}.$$

En el sistema MKSC, R tiene unidades de ohm (Ω) y de, acuerdo con la expresión $R = \frac{V}{I}$, el ohm se define como

$$\text{ohm } (\Omega) = \text{volt (V)}/\text{ampere (A)}.$$

Otro fenómeno que afecta a las resistencias es el **efecto Joule**. Este efecto establece que una resistencia se calienta y disipa energía en forma de calor cuando se hace circular una corriente por ella. Para determinar la energía disipada, recordamos que la diferencia dU de energía en los extremos de un resistor es

$$dU = V dQ = VI dt.$$

De forma que la potencia, energía por unidad de tiempo es, entonces:

$$P = \frac{dU}{dt} = VI = RI^2 = \frac{V^2}{R}.$$

Ésta es la base del funcionamiento de las bombillas o focos que producen luz eléctrica. Estos dispositivos están formados por una resistencia al vacío, que se calienta cuando se hace circular una corriente por ella y la energía se disipa en forma de luz.

La unidad utilizada para la potencia es el watt (W), que se define simplemente como

$$\text{watt (W)} = \text{volt (V)} \cdot \text{ampere (A)} = \text{joule (J)}/\text{segundo (s)}.$$

Capacitor

Un **capacitor** es un dispositivo formado por dos conductores que almacena carga y energía potencial eléctrica; dichos conductores pueden ser de geometrías arbitrarias, pero aquí consideraremos que son placas paralelas que se encuentran totalmente aisladas. Se dice que el capacitor está **cargado** cuando una de las placas tiene una carga Q y la otra placa una carga $-Q$, de tal manera que la carga total es cero. Para cargar un capacitor, basta con conectar los extremos de una batería a cada una de las placas que lo forman. Sobre las placas se acumulan cargas de igual magnitud y opuestas. Experimentalmente se encuentra que la carga Q depende directamente de la diferencia de potencial, $Q \propto V$, de tal manera que

$$Q = CV, \tag{5.2}$$

donde C es una constante que recibe el nombre de **capacitancia**. Al igual que la resistencia, la capacitancia también depende de la geometría de las placas, aunque independientemente de la forma del capacitor siempre se satisface la relación (5.2). En el sistema MKS, C tiene unidades de farad (F) y, de acuerdo con la expresión anterior, el farad se define como

$$\text{farad (F)} = \text{coulomb (C)}/\text{volt (V)}.$$

En la práctica es usual utilizar el microfarad ($1 \mu\text{F} = 10^{-6} \text{ F}$) y el picofarad ($1 \text{ pF} = 10^{-12} \text{ F}$). Por otra parte, cuando un capacitor se carga, de alguna forma, también se está almacenando energía; para ver que esto en efecto ocurre, consideremos un elemento diferencial de energía:

$$dU = V dQ = \frac{Q}{C} dQ.$$

Si integramos esta relación, se obtiene la energía almacenada por un capacitor

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2. \quad (5.3)$$

Inductor

Un **inductor** es un dispositivo que toma en cuenta el campo magnético generado por la corriente que circula por un conductor. De acuerdo con la experiencia, cuando circula una corriente dependiente del tiempo por un inductor, se genera una diferencia de potencial (también llamada fuerza electromotriz) que depende directamente de la rapidez de variación de la corriente, es decir, $V \propto \frac{dI}{dt}$. La constante de proporcionalidad entre estas dos cantidades es precisamente la **inductancia** L . Tenemos entonces que

$$V = L \frac{dI}{dt}. \quad (5.4)$$

Al igual que en el caso de la resistencia y capacitancia, la inductancia es una cantidad que depende de la geometría del conductor. En el sistema MKS, L tiene unidades de henry (H) y de acuerdo con la expresión anterior, el henry se define como

$$\text{henry (H)} = \text{volt (V)} \cdot \text{segundo (s)} / \text{ampere (A)}.$$

Al igual que los capacitores cargan energía de un campo eléctrico, los inductores cargan energía de un campo magnético. La diferencia dU de energía en los extremos de un inductor es

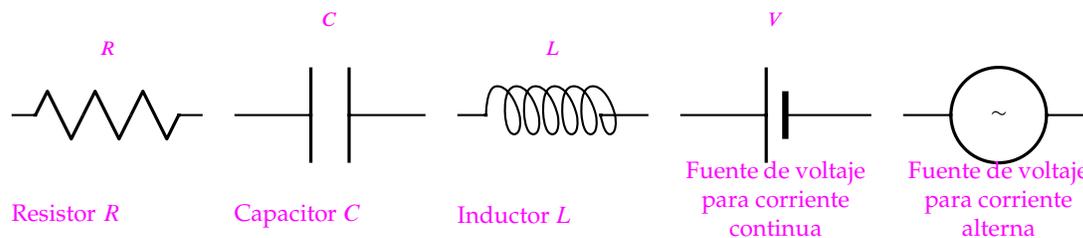
$$dU = V dQ = L \frac{dI}{dt} I dt = LI dI.$$

Si integramos esta relación, se obtiene la energía almacenada por un inductor

$$U = \frac{LI^2}{2}.$$

Como conclusión general podemos decir que, cuando circula una corriente por ellos, un resistor disipa RI^2 de energía por el efecto joule, que un capacitor almacena $\frac{1}{2}CV^2$ de energía en forma de carga y que un inductor almacena $\frac{1}{2}LI^2$ de energía en forma de corriente.

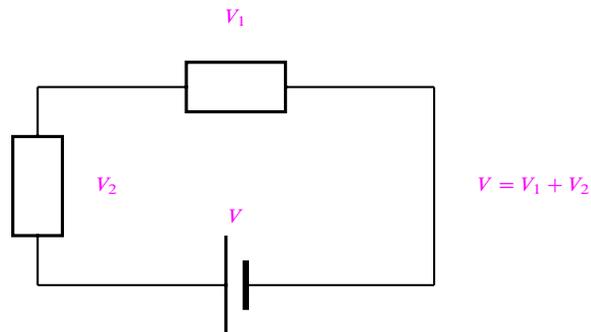
En la figura siguiente se muestran las representaciones gráficas para resistores, capacitores, inductores y fuentes de voltaje que se utilizan comúnmente en los circuitos eléctricos.



Antes de empezar nuestro estudio de circuitos mediante ED, necesitamos presentar dos resultados, conocidos como leyes de Kirchhoff de voltaje y de corriente que serán útiles posteriormente.

Ley de Kirchhoff de voltaje

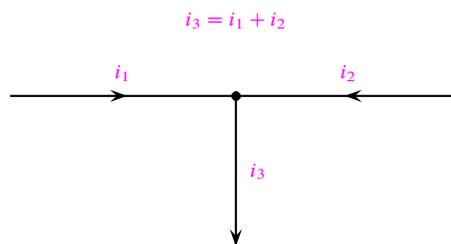
La suma de las caídas de voltaje (diferencias de potencial), a través de los elementos de un circuito en una malla simple (circuito cerrado sin cruces), es igual al voltaje (diferencia de potencial) aplicado.



Esta ley de voltaje es una forma de expresar que la energía se conserva en una malla simple, es decir, que la energía proporcionada como voltaje (energía por unidad de carga) se puede disipar cuando pasa por un resistor o almacenar cuando pasa por un capacitor o un inductor, de suerte que la suma de estas energías es igual a la energía total proporcionada al circuito.

Ley de Kirchhoff de corriente

La corriente que entra a un nodo simple (punto donde convergen varias líneas de corriente) es igual a la suma de todas las corrientes que salen de ese nodo.



Esta ley es una consecuencia de la conservación de la carga sobre un circuito. Es decir, si a un nodo llega una carga Q en un intervalo de tiempo Δt entonces esa misma carga debe distribuirse por todas las salidas del nodo, de tal forma que la suma de toda la carga que entra al nodo sea igual a la suma de toda la carga que sale del mismo.

Iniciemos ahora nuestro estudio de circuitos eléctricos. Hay dos tipos que nos interesen: los circuitos de corriente continua, donde la fuente de voltaje es tal que la corriente producida no cambia de dirección en el tiempo, y los circuitos de corriente alterna, donde la corriente cambia de dirección. Generalmente, en el primer caso, la fuente de voltaje produce una diferencia de potencial V constante en el tiempo. Una situación común que ocurre en el segundo caso es cuando la fuente produce un potencial que cambia periódicamente de signo; podemos representar este potencial V mediante una función sinusoidal, es decir: $V = V_0 \cos wt$, donde V_0 es la amplitud del voltaje y w es su frecuencia natural.