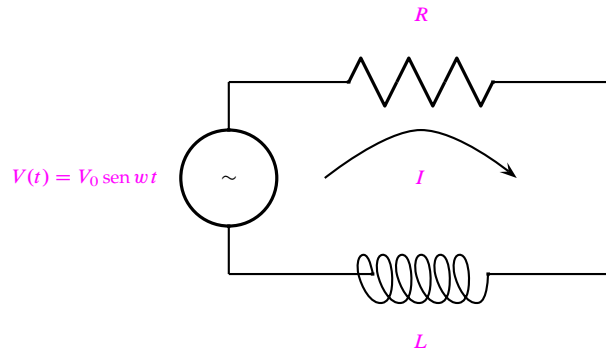


CAPÍTULO

5

Aplicaciones de ED de segundo orden

5.3.5 Circuito RL de corriente alterna



El circuito de la figura anterior está formado por una malla simple con una fuente de voltaje $V(t)$ de tipo sinusoidal, un resistor R y un inductor L y se le conoce como circuito RL de corriente alterna. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje, tenemos que

$$\begin{aligned} V_0 \sin \omega t &= RI + L \frac{dI}{dt} \Rightarrow L \frac{dI}{dt} + RI = V_0 \sin \omega t \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{RI}{L} = \frac{V_0}{L} \sin \omega t. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Observe que esta ecuación (5.1) es similar a la ecuación (??) página ??, si hacemos las relaciones:

Ecuación (??)		Ecuación (5.1)
Q	\longleftrightarrow	I
R	\longleftrightarrow	L
$\frac{1}{C}$	\longleftrightarrow	R

Así obtenemos, de la solución (??), que la corriente que circula sobre el circuito está dada por

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{V_0}{L \left(\frac{R}{L}\right)^2 + Lw^2} \left[\frac{R}{L} \operatorname{sen} wt - w \cos wt + we^{-\frac{R}{L}t} \right] = \\ &= \frac{V_0 L}{R^2 + L^2 w^2} \left[\frac{R}{L} \operatorname{sen} wt - w \cos wt + we^{-\frac{R}{L}t} \right]. \end{aligned}$$

Que se puede reescribir como

$$I(t) = \frac{V_0 L w e^{-\frac{R}{L}t}}{R^2 + L^2 w^2} + \frac{\frac{V_0}{L}}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + w^2}} \operatorname{sen}(wt + \phi).$$

Donde el ángulo de fase ϕ satisface:

$$\cos \phi = \frac{\frac{R}{L}}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + w^2}}, \quad \operatorname{sen} \phi = -\frac{w}{\sqrt{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + w^2}} \quad \& \quad \tan \phi = -\frac{wL}{R}.$$

Observe que, para tiempos grandes, la corriente que circula por el circuito tiene la misma frecuencia que el voltaje de entrada.

Ejemplo 5.3.1 Determinar la corriente en un circuito RL de corriente alterna, si $R = 1 \Omega$, $L = 0.01 \text{ H}$ y si $V = \cos 60t \text{ V}$. Suponga que inicialmente no circula corriente por el circuito.

▼ La ecuación diferencial para este ejemplo es

$$L \frac{dI}{dt} + RI = V(t) \Rightarrow 0.01 \frac{dI}{dt} + I = \cos 60t \Rightarrow \frac{dI}{dt} + 100I = 100 \cos 60t.$$

Multiplicamos por el factor integrante $\mu = e^{100t}$ ambos lados para obtener:

$$\frac{d(e^{100t} I)}{dt} = 100e^{100t} \cos 60t \Rightarrow e^{100t} I = 100 \int e^{100t} \cos 60t dt.$$

Utilizando la relación:

$$\int e^{at} \cos bt dt = \frac{e^{at}}{a^2 + b^2} (a \cos bt + b \operatorname{sen} bt),$$

obtenemos el resultado

$$\begin{aligned} e^{100t} I &= \frac{100e^{100t}}{100^2 + 60^2} (100 \cos 60t + 60 \operatorname{sen} 60t) + K \Rightarrow \\ \Rightarrow I(t) &= \frac{100}{100^2 + 60^2} (100 \cos 60t + 60 \operatorname{sen} 60t) + Ke^{-100t}. \end{aligned}$$

Si al tiempo $t = 0$ no hay corriente, entonces:

$$0 = \frac{100}{100^2 + 60^2}(100) + K \Rightarrow K = -\frac{10^4}{100^2 + 60^2}.$$

Finalmente, la corriente está dada por

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{100}{100^2 + 60^2}(100 \cos 60t + 60 \operatorname{sen} 60t - 100e^{-100t}) = \\ &= \frac{25}{34} \cos 60t + \frac{15}{34} \operatorname{sen} 60t - \frac{25}{34}e^{-100t} \text{ A.} \end{aligned}$$

□

Ejercicios 5.3.5 Circuito RL de corriente alterna. Soluciones en la página 4

1. Se conectan en serie un resistor de 30Ω y un inductor de 0.1 H a una fuente de voltaje alterna que suministra $V(t) = 100 \cos 400t \text{ V}$. Si inicialmente no circula corriente por el circuito, determine una expresión para la corriente en el tiempo t .
2. Un circuito RL está formado por un resistor de 10Ω , un inductor de 0.02 H y una fuente de voltaje alterna que suministra $V(t) = 120 \cos 500t \text{ V}$. Determine la corriente que circula por el circuito suponiendo que originalmente no hay corriente alguna.
3. Un resistor de 25Ω , un inductor de 0.5 H y una fuente de voltaje alterna $V(t) = 12 \cos 50t + 10 \operatorname{sen} 20t \text{ V}$ se conectan formando un circuito RL. Si inicialmente circula una corriente de 1 A , determine la corriente que circula en el tiempo t .
4. Un circuito en serie está formado por un resistor $R = 20 \Omega$, un inductor $L = 0.05 \text{ H}$ y una fuente de voltaje que suministra $V(t) = 80 \cos 100t \text{ V}$. Suponga que originalmente circula una corriente de 4 A . ¿Cuál será la corriente al tiempo t ?
5. Se conecta un resistor de 2Ω y un inductor de 0.25 H a una fuente de voltaje alterna que suministra $V(t) = 2.5e^{-5t} \cos 12t \text{ V}$ formando un circuito RL. Suponga que la fuente se conecta cuando circula por el circuito una corriente de 5 A . Determine la corriente que circula en el tiempo t .

Ejercicios 5.3.5 Circuito RL de corriente alterna. *Página 3*

1. $I(t) = \frac{6}{5} \cos 400t + \frac{8}{5} \operatorname{sen} 400t - \frac{6}{5} e^{-300t}$ A.

2. $I(t) = 6 \cos 500t + 6 \operatorname{sen} 500t - 6e^{-500t}$ A.

3. $I(t) = \frac{6}{25} \cos 50t + \frac{6}{25} \operatorname{sen} 50t + \frac{10}{29} \operatorname{sen} 20t - \frac{4}{29} \cos 20t + \frac{651}{725} e^{-50t}$ A.

4. $I(t) = \frac{64}{17} \cos 100t + \frac{16}{17} \operatorname{sen} 100t + \frac{4}{17} e^{-400t}$ A.

5. $I(t) = \frac{10}{51} e^{-5t} \cos 12t + \frac{40}{51} e^{-5t} \operatorname{sen} 12t + \frac{245}{51} e^{-8t}$ A.