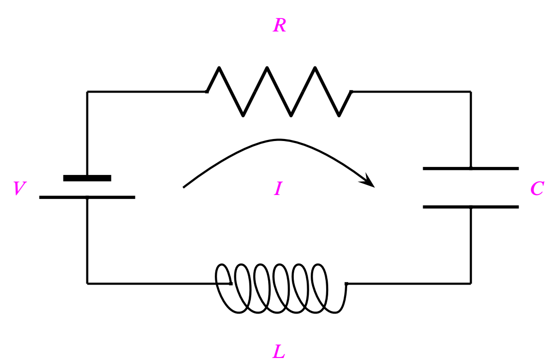
CAPÍTULO

5

Aplicaciones de ED de segundo orden

5.3.3 Circuito RLC de corriente continua



Consideremos ahora un circuito formado por un resistor R, un capacitor C y un inductor L conectados en serie con una fuente de voltaje V (véase la figura anterior). De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje:

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} + RI = V.$$

Como $I = \dfrac{dQ}{dt}$, obtenemos la siguiente ED para la carga:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V(t). \tag{5.1}$$

Derivando esta ED, se obtiene la ecuación diferencial que modela la corriente:

$$L\frac{d^2I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \frac{dV}{dt}. \tag{5.2}$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

Con cualquiera de estas dos ecuaciones diferenciales, podemos analizar qué ocurre con la corriente y con la carga en un circuito. Sugerimos, sin embargo, determinar primero la carga del capacitor utilizando la ecuación (**??**) y posteriormente derivar con respecto al tiempo para obtener la corriente en el circuito.

Observe que las ecuaciones diferenciales que gobiernan la carga y la corriente eléctrica en un circuito tienen la misma forma que la ecuación diferencial que describe las vibraciones mecánicas y, en consecuencia, dependiendo de las constantes R, L & C del circuito, se tendrán diferentes tipos de comportamiento de la carga y de la corriente.

Ejemplo 5.3.1 *Se conecta en serie una fuente de voltaje $V = 1.5$ V, una resistencia $R = 20\ \Omega$, un capacitor de 10^{-3} F y un inductor $L = 0.1$ H. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito en todo tiempo, si inicialmente el capacitor está totalmente descargado y no fluye corriente sobre el circuito.*

▼ La ecuación diferencial asociada al circuito RLC en serie de este ejemplo es

$$V = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0.1\frac{dI}{dt} + 20I + 10^3 Q = 1.5 \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 200\frac{dQ}{dt} + 10^4 Q = 15, \tag{5.3}$$

con las condiciones iniciales $Q(0) = 0$ C & $I(0) = 0$ A. Esta ecuación es similar a la ecuación diferencial de un resorte amortiguado sometido a una fuerza constante externa. La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 200r + 10^4 = 0.$$

Cuyas raíces son $r_{1,2} = -100$. Como las raíces son iguales, la solución general de la ecuación homogénea es de la forma

$$Q_h(t) = c_1 e^{-100t} + c_2 t e^{-100t}.$$

Por otra parte, una solución particular es $Q_p(t) = \dfrac{15}{10\,000} = 0.0015$. Así que la carga está dada por:

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_h(t) = 0.0015 + c_1 e^{-100t} + c_2 t e^{-100t}.$$

Y la corriente por:

$$I(t) = -100c_1 e^{-100t} + c_2 e^{-100t} - 100c_2 t e^{-100t}.$$

Usando las condiciones iniciales $Q(0) = 0$ & $I(0) = 0$, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0.0015 + c_1 &= 0; \\ -100c_1 + c_2 &= 0. \end{aligned}$$

De donde, $c_1 = -0.0015$ & $c_2 = -0.15$. Finalmente, la carga y la corriente son, para tiempos $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} Q(t) &= 0.0015 - 0.0015e^{-100t} - 0.15te^{-100t} = 0.0015\left(1 - e^{-100t} - 100te^{-100t}\right) \text{ C}; \\ I(t) &= 15te^{-100t} \text{ A}. \end{aligned}$$

Observe que la corriente tiene un máximo cuando $I'(t) = 0$.

$$I'(t) = 15e^{-100t} - 1\,500te^{-100t} = 0 \Rightarrow t = 0.01 \text{ s}.$$

Para $0 \leq t \leq 0.01$, la corriente crece; para $t \geq 0.01$ la corrienete decrece. Por otra parte, la carga es creciente siempre, ya que $t = 0$ es el único tiempo donde $I(t) = Q'(t) = 0$.

□

Ejemplo 5.3.2 *Se conecta en serie una fuente de voltaje $V = 110$ V, un capacitor de 10^{-3} F y un inductor $L = 0.1$ H. Determinar la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito en todo tiempo, si inicialmente el capacitor estaba totalmente descargado y no fluía corriente sobre el circuito.*

▼ Para un circuito LC en serie, como el de este ejemplo, la ED asociada es

$$V = L\frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} \Rightarrow 0.1\frac{dI}{dt} + 10^3 Q = 110 \Rightarrow \frac{d^2Q}{dt^2} + 10^4 Q = 1\,100, \tag{5.4}$$

con las condiciones iniciales $Q(0) = 0$ & $I(0) = 0$. Esta ecuación es similar a la ecuación diferencial de un resorte libre sometido a una fuerza externa constante. La ecuación auxiliar es

$$r^2 + 10^4 = 0.$$

Cuyas raíces son $r_{1,2} = \pm 100i$. Como las raíces son complejas, tenemos que la solución a la ecuación homogénea es

$$Q_h(t) = c_1 \cos 100t + c_2 \operatorname{sen} 100t.$$

Por otra parte, una solución particular es $Q_p(t) = \dfrac{1\,100}{10\,000} = 0.11$. Así que la carga está dada por

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_h(t) = 0.11 + c_1 \cos 100t + c_2 \operatorname{sen} 100t.$$

Y la corriente es

$$I(t) = -100c_1 \operatorname{sen} 100t + 100c_2 \cos 100t.$$

Usando las condiciones iniciales $Q(0) = 0$ & $I(0) = 0$, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 0.11 + c_1 &= 0; \\ 100c_2 &= 0. \end{aligned}$$

De donde $A = -0.11$ & $B = 0$. Finalmente la carga y la corriente son, para tiempos $t \geq 0$,

$$\begin{aligned} Q(t) &= 0.11\,(1 - \cos 100t) \text{ C}; \\ I(t) &= 11 \operatorname{sen} 100t \text{ A}. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 5.3.3 *Determinar la carga en todo tiempo sobre un circuito RLC en serie que satisface a la condición $R < 2\sqrt{\dfrac{L}{C}}$. Consideramos que la fuente de voltaje es constante e igual a V, la carga inicial en el capacitor es cero y no circula corriente en el circuito.*

▼ La ED (**??**) modela este sistema. A pesar de no ser una ED lineal homogénea, se puede convertir en una ED homogénea mediante un cambio de variable $Z = Q - VC$, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{dt} &= \frac{dQ}{dt} - \frac{d}{dt}(VC) = \frac{dQ}{dt}. \\ \frac{d^2Z}{dt^2} &= \frac{d^2Q}{dt^2}. \end{aligned}$$

Sustituyendo en (**??**):

$$L\frac{d^2Z}{dt^2} + R\frac{dZ}{dt} + \frac{Z + VC}{C} = V,$$

o bien,

$$L\frac{d^2Z}{dt^2} + R\frac{dZ}{dt} + \frac{Z}{C} = 0.$$

La ecuación característica es

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C} = 0,$$

cuya solución es

$$r_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

Puesto que $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$, el argumento dentro del radical es negativo; entonces la solución para Z es

$$Z = e^{-\frac{R}{2L}t}\left[c_1\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right) + c_2\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right)\right].$$

Luego, $Z = Q - VC \;\Rightarrow\; Q = VC + Z$, entonces:

$$Q(t) = VC + e^{-\frac{R}{2L}t}\left[c_1\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right) + c_2\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right)\right].$$

$$I(t) = Q'(t) = e^{-\frac{R}{2L}t}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right)\left[-c_1\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right) + c_2\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right)\right] -$$

$$-\frac{R}{2L}e^{-\frac{R}{2L}t}\left[c_1\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right) + c_2\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right)\right].$$

Considerando que $Q(0) = 0$, se tiene:

$$0 = VC + c_1 \;\Rightarrow\; c_1 = -VC.$$

Considerando que $I(0) = 0$, se tiene la segunda condición:

$$0 = c_2\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} - \frac{Rc_1}{2L} \;\Rightarrow\; c_2 = \frac{Rc_1}{2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}} = -\frac{RVC}{2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}.$$

Finalmente,

$$Q(t) = VC - VCe^{-\frac{R}{2L}t}\left[\cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right) + \frac{R}{2L\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}\, t\right)\right]\ \text{C},$$

que corresponde en su símil mecánico a una oscilación amortiguada. Observe que cuando el tiempo aumenta, la carga se estabiliza en $Q = VC$, que físicamente significa que el capacitor con el tiempo se carga totalmente.

□

Ejercicios 5.3.3 *Circuito RLC de corriente continua.* *Soluciones en la página* **??**

1. Se conecta en serie un resistor de 12 Ω, un capacitor de 0.1 F, un inductor de 2 H y una fuente de voltaje $V = 20$ V, formando un circuito RLC. Si inicialmente se encuentra descargado el capacitor y no circula corriente por el circuito, determinar en todo tiempo posterior expresiones para la carga y la corriente.

2. Un circuito RLC en serie está formado por un resistor de 4 Ω, un capacitor de 1 F y un inductor de 4 H. Una fuente de voltaje $V = 120$ V suministra energía al circuito. Suponga que inicialmente no circula corriente por el circuito y que el capacitor está descargado. Determinar la corriente que circula en todo tiempo por el circuito. ¿En qué tiempo se obtiene la corriente máxima?

3. Se conecta en serie un resistor de 4 Ω, un capacitor de 0.05 F y un inductor de 0.2 H a una fuente de voltaje $V = 50$ V formando un circuito RLC. Determinar la carga en el capacitor y la corriente por el circuito en el tiempo t, si inicialmente la carga es de 2 C y no circula corriente por el circuito. ¿En qué tiempo el capacitor obtiene su mayor carga?

4. Un circuito RLC está formado por un resistor $R = 3.2$ Ω, un inductor $L = 0.4$ H y un capacitor $C = 0.1$ F. Si colocamos una fuente de voltaje directa de 50 V en $t = 0$ s, y la suspendemos en $t = \pi/3$ s, determinar la carga en el capacitor y la corriente sobre el circuito antes y después de $t = \pi/3$ s, suponiendo que inicialmente el capacitor tiene una carga de 5 C y circula una corriente de 12 A.

5. Se conecta en serie un resistor $R = 5$ Ω, un capacitor de 0.04 F, un inductor de 0.5 H y una fuente de voltaje $V = 120$ V. Determinar la carga en el capacitor y la corriente por el circuito en el tiempo t, si inicialmente la carga es de 10 C y la corriente de 5 A.

Ejercicios 5.3.3 *Circuito RLC de corriente continua.* *Página* **??**

1. $Q(t) = 2 - \frac{5}{2}e^{-t} + \frac{1}{2}e^{-5t}$ C;
   $I(t) = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{5}{2}e^{-5t}$ A.
2. $I(t) = 30te^{-t/2}$ A;
   $I_{máx} = 22.0728$ A en $t = 2$ s.
3. $Q(t) = 2.5 - 0.5e^{-10t} - 5te^{-10t}$ C;
   $I(t) = 50te^{-10t}$ A;
   $Q_{máx} = \lim_{t \to \infty} Q(t) = 2.5$ C.
4. Para $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$:
   $Q(t) = 5 + 4e^{-4t} \operatorname{sen} 3t$ C;
   $I(t) = 12e^{-4t} \cos 3t - 16e^{-4t} \operatorname{sen} 3t$ A.
   Para $t \ge \frac{\pi}{3}$:
   $\hat{Q}(t) = -5e^{4(\frac{\pi}{3} - t)} \cos 3t + \left(4 - \frac{20}{3}e^{\frac{4\pi}{3}}\right) e^{-4t} \operatorname{sen} 3t$ C;
   $\hat{I}(t) = 12e^{-4t} \cos 3t + \left(\frac{125}{3}e^{\frac{4\pi}{3}} - 16\right) e^{-4t} \operatorname{sen} 3t$ A.
5. $Q(t) = \frac{24}{5} + \frac{26}{5}e^{-5t} \cos 5t + \frac{31}{5}e^{-5t} \operatorname{sen} 5t$ C;
   $I(t) = 5e^{-5t} \cos 5t - 57e^{-5t} \operatorname{sen} 5t$ A.