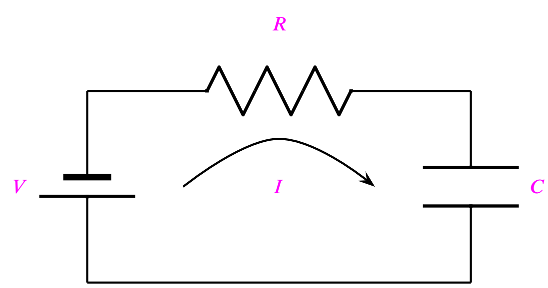
CAPÍTULO

5

Aplicaciones de ED de segundo orden

5.3.1 Circuito RC de corriente continua



En esta figura se muestra un circuito RC de corriente continua, el cual está formado por una malla simple con una fuente de voltaje V constante, un resistor R y un capacitor C. Cuando se conecta la fuente, las caídas de potencial ocurren en el resistor RI y en el capacitor Q/C. De acuerdo con la ley de Kirchhoff de voltaje, tenemos entonces que

$$V = RI + \frac{Q}{C} = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C}.$$

Es decir,

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V, \tag{5.1}$$

donde la fuente de voltaje proporciona una diferencia de potencial constante V. Resolvemos la ED que resulta. Para esto reescribamos esta ecuación, multiplicando por C, como

$$RC\frac{dQ}{dt} + Q = VC.$$

1. canek.azc.uam.mx: 23/ 9/ 2010

Separando variables:

$$\frac{dt}{RC} = \frac{dQ}{VC - Q}.$$

Integrando esta última ecuación y considerando la condición inicial de que al tiempo $t = 0$ la carga en el capacitor es cero coulombs, $Q(0) = 0$, obtenemos:

$$\int \frac{dt}{RC} = \int \frac{dQ}{VC - Q} \Rightarrow \frac{t}{RC} = -\ln(VC - Q) + K.$$

Usamos $Q(0) = 0$

$$\frac{0}{RC} = -\ln(VC) + K \Rightarrow K = \ln(VC).$$

De esta manera,

$$\frac{t}{RC} = -\ln(VC - Q) + \ln(VC) = \ln\left(\frac{VC}{VC - Q}\right).$$

Aplicando la función exponencial a ambos miembros, se tiene:

$$e^{\frac{1}{RC}t} = \frac{VC}{VC - Q}.$$

Despejando Q:

$$VC - Q = VCe^{-\frac{1}{RC}t} \Rightarrow Q = VC - VCe^{-\frac{1}{RC}t} = VC\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right).$$

Entonces:

$$Q(t) = VC\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right). \tag{5.2}$$

Y derivando esta última expresión, obtenemos la corriente que circula por el circuito:

$$I(t) = \frac{V}{R}e^{-\frac{1}{RC}t}.$$

A la constante $\tau_c = RC$ se le conoce como constante capacitiva del circuito y su efecto es ampliar o reducir el tiempo de carga del capacitor. Observe que en el tiempo $t = 0$, la carga almacenada en el capacitor es $Q = 0$; en consecuencia no hay caída de potencial sobre el capacitor en ese momento. Con el tiempo el capacitor se carga totalmente con una carga $Q = VC$ y la diferencia de potencial es la proporcionada por la fuente de voltaje. Ocurre exactamente lo contrario en la resistencia, en el tiempo $t = 0$ la corriente es $I = V/R$ y la diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia es exactamente la que proporciona la fuente de potencial. Cuando t crece, la corriente decrece hasta desaparecer; entonces no hay diferencia de potencial en la resistencia.

Ejemplo 5.3.1 *Considere un circuito RC con $R = 120\ \Omega$ y $C = 1/1\,200$ farads (F). Al tiempo $t = 0$ se conecta una fuente de voltaje constante $V = 120$ V. Si inicialmente el capacitor estaba descargado, determine cómo cambia la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito.*

▼ En este caso, la ecuación diferencial que la carga satisface es

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V \Rightarrow 120\frac{dQ}{dt} + 1200Q = 120 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + 10Q = 1. \tag{5.3}$$

Para resolver la ecuación anterior, utilizamos el método de separación de variables; tenemos entonces que

$$dt = \frac{dQ}{1 - 10Q}.$$

Integrando esta ecuación tenemos:

$$t = -\frac{1}{10}\ln(1 - 10Q) + K.$$

Considerando que al tiempo $t = 0$ la carga en el capacitor es $Q(0) = 0$, obtenemos:

$$0 = -\frac{1}{10}\ln\left[1 - 10(0)\right] + K \;\Rightarrow\; 0 = -\frac{1}{10}\ln 1 + K \;\Rightarrow\; K = 0.$$

Despejamos la carga Q:

$$t = -\frac{1}{10}\ln\left(1 - 10Q\right) \;\Rightarrow\; -10t = \ln\left(1 - 10Q\right) \;\Rightarrow\; e^{-10t} = 1 - 10Q,$$

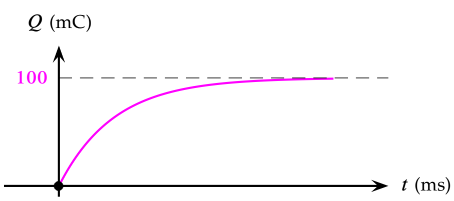
de donde:

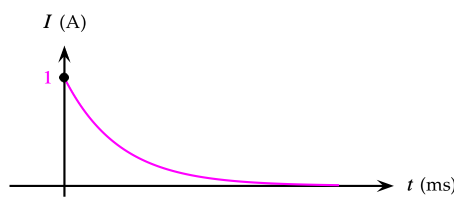
$$Q(t) = 0.1\left(1 - e^{-10t}\right).$$

La corriente que circula por el circuito se obtiene derivando la carga, así tenemos:

$$I(t) = e^{-10t}.$$

Observe que la máxima carga del capacitor será $Q = 0.1$ C $= 100$ mC y la mayor corriente será $I = 1$ A. Las gráficas siguientes muestran tanto el comportamiento de la carga como el de la corriente en el tiempo.





□

Ejemplo 5.3.2 *Considere el circuito RC del ejemplo anterior ($R = 120\ \Omega$ y $C = 1/1\,200$ F). Si se desconecta la fuente cuando la carga es de 8 mC, determine cómo cambia la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito después de desconectar la fuente.*

▼ La ED de la carga es

$$V = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \;\Rightarrow\; 0 = 120\frac{dQ}{dt} + 1\,200Q \;\Rightarrow\; 0 = \frac{dQ}{dt} + 10Q. \tag{5.4}$$

Separando variables se tiene que

$$-10\,dt = \frac{dQ}{Q}.$$

Integrando esta ecuación tenemos:

$$-10t + K = \ln Q \;\Rightarrow\; Q = Ke^{-10t}.$$

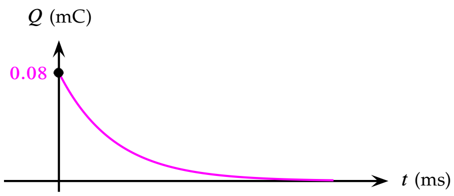
Considerando que al tiempo $t = 0$ la carga en el capacitor es de 8 mC, $Q(0) = 0.008$, obtenemos que la constante $K = 0.008$. Finalmente hallamos que

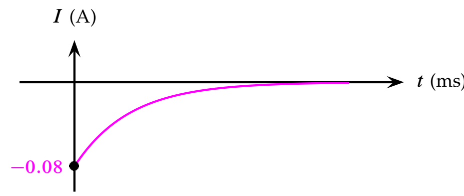
$$Q(t) = 0.008e^{-10t}\ \text{C}.$$

La corriente que circula por el circuito se obtiene derivando la carga, así tenemos:

$$I(t) = -0.08e^{-10t}\ \text{A}.$$

Observe que ahora tanto la carga como la corriente tienden a cero rápidamente. Físicamente la carga que tiene el capacitor sirve para generar una corriente en el circuito que, al cruzar por la resistencia, se disipa en forma de calor. En la figura siguiente se muestra el comportamiento de la carga y la corriente en el tiempo.





□

Ejercicios 5.3.1 *Circuito RC de corriente continua.* *Soluciones en la página 5*

1. Se conecta un resistor $R = 100\ \Omega$ con un capacitor $C = 10^{-3}$ F a una fuente de voltaje directa $V = 50$ V formando un circuito RC. Si inicialmente el capacitor tiene carga $Q_0 = 0$, determine la carga en el capacitor y la corriente que circula por el circuito al tiempo t.

2. Un circuito RC se forma con un resistor $R = 80\ \Omega$, un capacitor $C = 10^{-2}$ F y una fuente de voltaje directa de 100 V. Determinar la carga y la corriente en todo tiempo suponiendo que inicialmente el capacitor tiene carga $Q_0 = 0$.

3. Determinar la carga y la corriente en un circuito RC formado por un resistor $R = 20\ \Omega$, un capacitor $C = 0.04$ F y una fuente de voltaje directa $V = 120$ V. Suponga que, al inicio, la carga del capacitor es de 2 C.

4. Un circuito RC tiene un resistor $R = 40\ \Omega$ y un capacitor $C = 0.002$ F. Suponga que se conectan con una fuente de voltaje $V = 80$ V. Determine la corriente que circula sobre el circuito en todo tiempo, suponiendo que el capacitor tiene una carga inicial de 0.01 C.

5. Una fuente de voltaje de 160 V se conecta a un resistor de 200 Ω y a un capacitor $C = 0.05$ F formando un circuito RC. Suponga que en el tiempo $t = 0$, el capacitor tiene una carga $Q_0 = 3$ C. Determine la carga en el capacitor en todo tiempo.

Ejercicios 5.3.1 *Circuito RC de corriente continua.* *Página: 4*

1. $Q(t) = \frac{1}{20}\left(1 - e^{-10t}\right)$ C;
   $I(t) = \frac{1}{2}e^{-10t}$ A.
2. $Q(t) = 1 - e^{-\frac{5t}{4}}$ C;
   $I(t) = \frac{5}{4}e^{-\frac{5t}{4}}$ A.
3. $Q(t) = \frac{24}{5} - \frac{14}{5}e^{-\frac{5t}{4}}$ C;
   $I(t) = \frac{7}{2}e^{-\frac{5t}{4}}$ A.
4. $Q(t) = \frac{4}{25} - \frac{3}{20}e^{-\frac{25t}{2}}$ C;
   $I(t) = \frac{15}{8}e^{-\frac{25t}{2}}$ A.
5. $Q(t) = 8 - 5e^{-t/10}$ C;
   $I(t) = \frac{1}{2}e^{-t/10}$ A.