CAPÍTULO

6

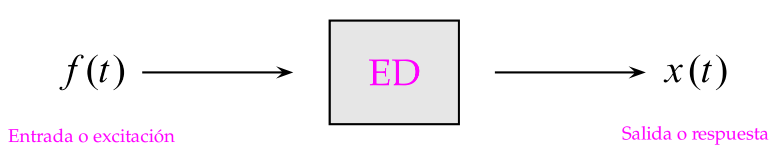
La transformada de Laplace

6.7 Teorema de Convolución y la delta de Dirac

En el análisis de sistemas lineales, como en los sistemas vibratorios (mecánicos y eléctricos), uno de los objetivos es conocer la respuesta (o salida) del sistema provocada por una función de excitación (o entrada). En secciones anteriores modelamos sistemas vibratorios mediante ecuaciones diferenciales de la forma

$$\alpha x''(t) + \beta x'(y) + \gamma x(t) = f(t),$$

donde $f(t)$ es una función de excitación (o entrada) del sistema, mientras que $x(t)$ es la respuesta (o salida) a esta excitación. De esta manera, el propósito de resolver un PVI es determinar cómo la ED (una caja negra) transforma una función de entrada $f(t)$ en una salida $x(t)$ cuando se conocen las condiciones iniciales $x(0)$ & $x'(0)$. La siguiente figura es una representación de estos elementos



En este capítulo, un PVI

$$\alpha x''(t) + \beta x'(y) + \gamma x(t) = f(t), \quad \text{con} \quad x(0) = 0 \,\&\, x'(0) = 0. \tag{6.1}$$

ha sido resuelto, aplicando TL a la ED anterior. No obstante, existen problemas que llevan a PVI similares a (**??**), los cuales no siempre permiten encontrar la solución de manera directa. La razón es que no se conoce, con precisión, cómo afecta la caja negra a la función de entrada. Para resolver este tipo de incógnitas, se introducen al sistema funciones de entrada que se conocen como impulsos y, una vez conocida la respuesta a estos impulsos, se obtiene la salida $x(t)$ mediante una operación llamada convolución que es una extensión, básicamente, de la propiedad de superposición.

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

La delta de Dirac

Consideremos una fuerza $f(t)$ que actúa sólo durante un intervalo de tiempo muy pequeño $a \le t \le b$, con $f(t) = 0$ para todo valor de t fuera del intervalo. Ejemplos típicos de este tipo de fuerzas serían la fuerza impulsiva de un bate que golpea una pelota (el impacto es casi instantáneo) o bien un rápido aumento de voltaje (resultante de la descarga de un rayo), por ejemplo. En tales situaciones, el principal efecto de la fuerza depende sólo del valor de la integral

$$p = \int_a^b f(t)dt \tag{6.2}$$

y ése no es influenciado por la forma precisa en que varía $f(t)$. El número p de la ecuación (**??**) se llama impulso de la fuerza $f(t)$ sobre el intervalo $[a, b]$.
Ahora bien, en el caso de una fuerza $f(t)$ que actúa sobre una partícula de masa m constante, se tiene por la segunda ley de Newton:

$$f(t) = mv'(t) = \frac{d}{dt}[mv(t)].$$

De donde, por el teorema Fundamental del Cálculo:

$$p = \int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \frac{d}{dt}[mv(t)]dt = mv(t)\Big|_a^b = mv(b) - mv(a).$$

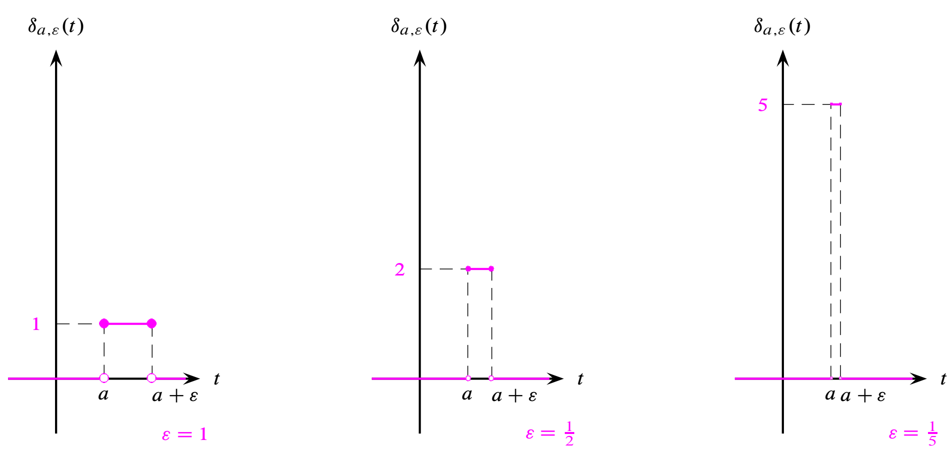
A cada término en el miembro derecho del resultado anterior se le llama momento lineal, así que el impulso de la fuerza es igual a la variación del momento lineal de la partícula. En la práctica, el cambio en el momento lineal es el único efecto que interesa, por lo tanto sólo necesitamos conocer el impulso de la fuerza; no necesitamos conocer ni la función precisa $f(t)$ ni el lapso exacto durante el cual actúa la fuerza.
Si ahora seleccionamos un número fijo $\varepsilon > 0$ que se aproxime a la duración de ese lapso y reemplazamos a $f(t)$ por

$$\delta_{a,\varepsilon}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}, & \text{si } a \le t \le a+\varepsilon; \\ 0, & \text{si } t \notin [a, a+\varepsilon]\,; \end{cases} \tag{6.3}$$

entonces, para $b = a + \varepsilon$, el impulso de $\delta_{a,\varepsilon}(t)$ sobre el intervalo $[a, b]$ es

$$p = \int_a^b \delta_{a,\varepsilon}(t)dt = \int_a^{a+\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon}dt = 1.$$

Así, $f(t) = \delta_{a,\varepsilon}(t)$ tiene un impulso unitario, cualquiera que sea el número $\varepsilon > 0$.
Observemos el comportamiento de $\delta_{a,\varepsilon}(t)$ cuando $\varepsilon \to 0$, por medio de las siguientes gráficas:



Como el lapso preciso durante el cual actúa la fuerza no parece ser importante, resulta tentador pensar en un impulso instantáneo que ocurra precisamente en el tiempo $t = a$. Así, parece razonable pensar que esta idea la conseguiríamos bajo un proceso de límite, concretamente cuando $\varepsilon \to 0$. Si adoptamos este proceso, tendríamos:

$$\delta(t-a) = \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{a,\varepsilon}(t).$$

Encaminados por las consideraciones formales, si también pudiéramos intercambiar el límite con el signo de integral:

$$\int_0^\infty \delta(t-a)dt = \int_0^\infty \lim_{\varepsilon \to 0} \delta_{a,\varepsilon}(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\varepsilon} \delta_{a,\varepsilon}(t)dt = 1. \tag{6.4}$$

Pero el límite, cuando $\varepsilon \to 0$, en (**??**) da:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} +\infty, & \text{si } t = a; \\ 0, & \text{si } t \neq a\,. \end{cases} \tag{6.5}$$

Es claro que ninguna función puede satisfacer a la vez las condiciones (**??**) y (**??**). En primer lugar, la sola presencia del símbolo $+\infty$ nos hace ver que δ no es una función en el sentido usual. Además, aceptando ver en el símbolo $+\infty$ un número, la función cuyo valor es cero en todas partes con la excepción de un solo punto proporciona cero como valor de la integral y no 1 como hemos obtenido. Alrededor de 1950, después de que los ingenieros y físicos habían estado usando amplia y fructíferamente la función delta durante unos 20 años sin una justificación rigurosa, el matemático francés Laurent Schwartz desarrolló la teoría matemática de las funciones generalizadas que proporcionó el fundamento lógico para las técnicas basadas en la delta de Dirac. El símbolo $\delta(t-a)$, se llama delta de Dirac en a, en honor al físico teórico británico P.A.M. Dirac que en los primeros años de la década de 1930 la introdujo suponiendo que disfrutaba de las propiedades (**??**) y (**??**).
Como $\delta(t-a)$ no es una función, soslayaremos el problema de su definición yendo en todo caso a la consideración de su efecto operativo. El siguiente cálculo motiva el significado que le asignaremos. Si $h(t)$ es una función continua en un intervalo que contenga a $[a, a+\varepsilon]$, entonces el teorema del Valor Medio para integrales implica que

$$\int_a^{a+\varepsilon} h(t)dt = \varepsilon h(t_0),$$

para algún punto t_0 en el intervalo $[a, a+\varepsilon]$. De esta manera:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^\infty h(t)\delta_{a,\varepsilon}(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{a+\varepsilon} h(t)\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)dt = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon h(t_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} h(t_0) = h(a).$$

En la última igualdad hemos utilizado la continuidad de h.
Si en el cálculo anterior pudiéramos intercambiar el límite con la integral [como ya hemos supuesto en (**??**)], entonces tendríamos que:

$$\int_0^\infty h(t)\delta(t-a)\,dt = h(a). \tag{6.6}$$

Observamos pues que, si se aplica un impulso p en $t = a$, entonces la fuerza aplicada se puede modelar por $f(t) = p\delta(t-a)$.

Ejemplo 6.7.1 *Calcular la TL de $f(t) = \delta(t-a)$.*

▼ Usando (**??**), con $h(t) = e^{-st}$:

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\} = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t-a)\,dt = e^{-as}.$$

□

- De acuerdo a las consideraciones anteriores, formalmente podemos decir que la derivada de la función escalón unitario es la delta de Dirac. Es decir:

$$u'(t-a) = \delta(t-a). \tag{6.7}$$

▼ En efecto, observamos:

$$\delta_{a,\varepsilon}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\left[u(t-a) - u(t-a-\varepsilon)\right],$$

de donde:

$$\begin{aligned}
\delta(t-a) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \delta_{a,\varepsilon}(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u(t-a) - u(t-a-\varepsilon)}{\varepsilon} = \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{u(t-a-\varepsilon) - u(t-a)}{-\varepsilon} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(t-a+h) - u(t-a)}{h} = u'(t-a).
\end{aligned}$$

Tomando $h = -\varepsilon$ se tiene que $\varepsilon \to 0 \;\Rightarrow\; h \to 0$.

□

Ahora podemos resolver el siguiente ejemplo, presentado en la introducción.

Ejemplo 6.7.2 *Una masa unida a un resorte se libera desde el reposo a 2 m por debajo de la posición de equilibrio y comienza a vibrar. Después de 5 s, la masa recibe un golpe que suministra un impulso (momento lineal) sobre la masa de 8 N·s dirigido hacia abajo. Hallar la posición de la masa en cualquier instante. (Éste es el ejemplo* **??** *de la introducción.)*

▼ El sistema queda descrito por el siguiente PVI:

$$mx''(t) + kx(t) = 8\delta(t-5), \quad \text{con} \quad x(0) = 2 \;\&\; x'(0) = 0.$$

Dividiendo entre m:

$$x''(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{8}{m}\delta(t-5), \quad \text{con} \quad x(0) = 2 \;\&\; x'(0) = 0.$$

Tal y como hicimos en el capítulo sobre vibraciones, consideramos $w^2 = \dfrac{k}{m}$. Si aplicamos TL en ambos miembros de la ED

$$x''(t) + w^2x(t) = \frac{8}{m}\delta(t-5),$$

obtenemos:

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + w^2X(s) = \frac{8}{m}e^{-5s}.$$

Así, al tener en cuenta las condiciones iniciales, encontramos:

$$(s^2 + w^2)X(s) = 2s + \frac{8}{m}e^{-5s};$$

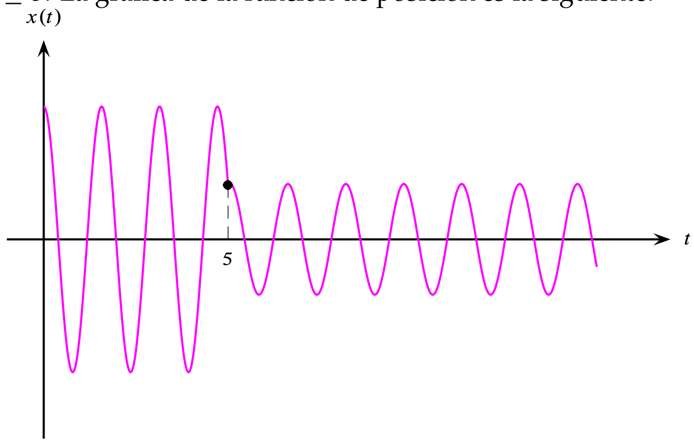
de donde:

$$X(s) = \frac{2s + \frac{8}{m}e^{-5s}}{s^2 + w^2} = \frac{2s}{s^2 + w^2} + \frac{8}{m}\frac{e^{-5s}}{s^2 + w^2}.$$

Lo único que resta es obtener $x(t)$ mediante el cálculo de la TL inversa. De esta manera:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{s^2 + w^2}\right\} + \frac{8}{m}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-5s}}{s^2 + w^2}\right\} = \\
&= 2\cos wt + \frac{8}{mw}u(t-5)\operatorname{sen}[w(t-5)] = \\
&= 2\cos wt + \frac{8}{\sqrt{mk}}u(t-5)\operatorname{sen}[w(t-5)].
\end{aligned}$$

Observemos que, dada la presencia de la función $u(t-5)$, el efecto que tiene el impulso sobre el sistema sólo es detectable para $t \geq 5$. La gráfica de la función de posición es la siguiente:



En la gráfica resulta notoria la perturbación que se imprime al sistema en el tiempo $t = 5$ s por efecto del impulso aplicado. Obsérve que, en ese momento, la masa está debajo de la posición de equilibrio y se va dirigiendo hacia esta posición cuando recibe un golpe justo en la dirección contraria, lo que explica por qué la oscilación se aminora y además por qué se aprecia en ese instante un cambio abrupto en la dirección tangencial sobre la gráfica.

□

Convolución

Como hemos indicado, es posible determinar la respuesta que sobre un sistema eléctrico tiene un impulso, llamado también pulso, de corta duración. Así, si se excita al sistema con un pulso $\delta(t)$, podemos obtener su respuesta $h(t)$, llamada respuesta al impulso. Si el impulso se aplica en el tiempo $t = s$, lo único que ocurre es un retraso en la salida y ésta será $h(t-s)$. Si ahora, el impulso tuviese una intensidad diferente de la unidad en $t = s$, por ejemplo $f(s)\delta(t-s)$, entonces por la linealidad la salida será $f(s)h(t-s)$. Si consideramos la suma de todas las entradas de este tipo, entonces la función de excitación es

$$\int_0^\infty f(s)\delta(t-s)\,ds = f(t) \quad \text{por la propiedad (\textbf{??}).}$$

Por otro lado, como una extensión de la propiedad de superposición para ED lineales, deducimos que la respuesta del sistema es

$$x(t) = \int_0^\infty f(s)h(t-s)\,ds. \tag{6.8}$$

Las figuras siguientes corresponden a diferentes funciones de excitación y salidas correspondientes:

$$\delta(t) \longrightarrow \boxed{ED} \longrightarrow h(t) \qquad \delta(t-s) \longrightarrow \boxed{ED} \longrightarrow h(t-s)$$

$$f(s)\delta(t-s) \longrightarrow \boxed{ED} \longrightarrow f(s)h(t-s) \qquad \int_0^\infty f(s)\delta(t-s)\,ds\delta(t-s) \longrightarrow \boxed{ED} \longrightarrow \int_0^\infty f(s)h(t-s)\,ds$$

El miembro derecho del último resultado (**??**) se conoce como convolución de f con h, y se escribe $f(t) * h(t)$; por lo tanto:

$$x(t) = f(t) * h(t) = \int_0^\infty f(s)h(t-s)\,ds.$$

La forma general de convolución entre $h(t)$ & $f(t)$ puede simplificarse debido a que la respuesta al impulso $h(t)$ cumple $h(t) = 0$, si $t < 0$. De esta forma $h(t-s) = 0$ para $s > t$. De donde deducimos que podemos cambiar el límite superior de integración a t en lugar de ∞. De esta manera tenemos la siguiente definición:

- La convolución de las funciones y & h, escrita como, $y * h$ se define mediante:

$$x(t) = \int_0^t y(s)h(t-s)ds = y(t) * h(t).$$

Ejemplo 6.7.3 *Obtener la convolución $f * g$ de las funciones $f(t) = e^{-t}$ & $g(t) = \alpha e^{-\alpha t}$, α constante.*

▼

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds = \int_0^t e^{-s}\alpha e^{-\alpha(t-s)}\,ds = \alpha \int_0^t e^{-\alpha t}e^{(\alpha-1)s}\,ds = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1}e^{-\alpha t}\left[e^{(\alpha-1)s}\right]\Big|_0^t = \frac{\alpha}{\alpha-1}e^{-\alpha t}\left[e^{(\alpha-1)t}-1\right] = \\ &= \frac{\alpha}{\alpha-1}\left[e^{-t}-e^{-\alpha t}\right], \quad \text{si } \alpha \neq 1. \end{aligned}$$

Si $\alpha = 1$, tenemos:

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(s)g(t-s)\,ds = \int_0^t e^{-s}e^{-\alpha(t-s)}\,ds = \int_0^t e^{-s}e^{-t}e^{s}\,ds = e^{-t}\int_0^t ds = te^{-t}.$$

De esta forma:

$$f(t) * g(t) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha-1}\left[e^{-t}-e^{-\alpha t}\right], & \text{si } \alpha \neq 1; \\ te^{-t}, & \text{si } \alpha = 1. \end{cases}$$

□

En esta sección tenemos 3 resultados importantes:

1. Para una función $h(t)$ continua:

$$\int_0^\infty h(t)\delta(t-a)\,dt = h(a), \quad \text{con} \quad a > 0.$$

2. La derivada de la función escalón unitario es la delta de Dirac:

$$u'(t-a) = \delta(t-a).$$

3. La respuesta $x(t)$ de un sistema de la forma:

$$\alpha x''(t) + \beta x'(t) + \gamma x(t) = f(t), \quad \text{con} \quad x(0) = 0 \;\&\; x'(0) = 0,$$

se puede hallar calculando la convolución de la función excitación $f(t)$ con la función respuesta al impulso $h(t)$, es decir:

$$x(t) = f(t) * h(t) = \int_0^t f(s)h(t-s)\,ds.$$

Teorema 6.1 *Las siguientes propiedades se cumplen para la convolución:*

1. *Conmutatividad:* $f * g = g * f$.
2. *Asociatividad:* $(f * g) * h = f * (g * h)$.
3. $f(t) * g(t) \longleftrightarrow F(s)G(s)$.

Ejemplo 6.7.4 *Hallar la convolución de $f(t) = \operatorname{sen} t$ & $g(t) = \delta(t)$.*

▼

$$f(t) * \delta(t) = \int_0^t f(s)\delta(t-s)\,ds = f(t) = \operatorname{sen} t.$$

□

Ejemplo 6.7.5 *Hallar* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^3+4s}\right\}$.

▼ Escribimos:

$$\frac{1}{s^3+4s} = \frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+4}.$$

Entonces, con $F(s) = \dfrac{1}{s}$ & $G(s) = \dfrac{1}{s^2+4}$ distinguimos que $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ & $g(t) \longleftrightarrow G(s)$, donde:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\} = 1 \quad \& \quad g(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+4s}\right\} = f(t)*g(t) = g(t)*f(t) = \int_0^t g(s)f(t-s)\,ds = \int_0^t \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2s\,ds = -\frac{1}{4}\cos 2s\Big|_0^t = \frac{1}{4}[1-\cos 2t].$$

Observación. En lugar de calcular $f(t) * g(t)$, procedimos al cálculo de $g(t) * f(t)$ porque éste produce una integral más sencilla de realizar.

□

Ejemplo 6.7.6 *Resolver la ecuación integro-diferencial*

$$x(t) = 5\cos t + \int_0^t x(s)(t-s)\,ds.$$

▼ Si $f(t) = t$, entonces la ecuación puede ser escrita como:

$$x(t) = 5\cos t + x(t) * f(t).$$

Si ahora aplicamos TL en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}\{x(t)\} = \mathcal{L}\{5\cos t\} + \mathcal{L}\{x(t) * f(t)\} \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow X(s) = 5\frac{s}{s^2+1} + X(s)\cdot\frac{1}{s^2} \Rightarrow X(s)\left[1-\frac{1}{s^2}\right] = \frac{5s}{s^2+1} \Rightarrow \\
&\quad\Rightarrow X(s)\left[\frac{s^2-1}{s^2}\right] = \frac{5s}{s^2+1} \Rightarrow X(s) = \frac{5s^3}{(s^2-1)(s^2+1)} = \frac{\frac{5}{4}}{s-1} + \frac{\frac{5}{4}}{s+1} + \frac{5s}{2(s^2+1)}.
\end{aligned}$$

donde el último resultado se obtuvo por fracciones parciales. Por lo tanto, al aplicar TL inversa:

$$\begin{aligned}
x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{4}}{s-1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\frac{5}{4}}{s+1}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5s}{2(s^2+1)}\right\} = \\
&= \frac{5}{4}e^t + \frac{5}{4}e^{-t} + \frac{5}{2}\cos t.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 6.7.7 *La respuesta al impulso unitario de un sistema es $h(t) = e^{-t}$. Obtener la respuesta $x(t)$ dada la función de excitación $y(t) = tu(t)$, si las condiciones iniciales son $x(0) = 0$ & $x'(0) = 0$.*

▼ La respuesta se obtiene a través de la convolución:

$$x(t) = y(t) * h(t) = h(t) * y(t) = \int_0^t h(s)y(t-s)\,ds\,.$$

De modo que

$$x(t) = \int_0^t e^{-s}(t-s)u(t-s)\,ds = \int_0^t (t-s)e^{-s}\,ds.$$

Si ahora integramos por partes, con $u = t - s$, $dv = e^{-s}\,ds$ & t constante, obtenemos:

$$x(t) = -(t-s)e^{-s}\Big|_0^t - \int_0^t e^{-s}ds = t + \left(e^{-s}\Big|_0^t\right) = t + e^{-t} - 1.$$

□

Ejercicios 6.7.1 *Teorema de Convolución y la delta de Dirac.* *Soluciones en la página* **??**
Calcular la TL de las siguientes funciones:

1. a. $f(t) = e^t\delta(t-2)$.
   b. $g(t) = t\delta(t-1)$.
   c. $h(t) = te^{-t}\delta(t+1)$.
2. $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t-u)^2\cos 2u\,du$.
3. $g(t) = \displaystyle\int_0^t (t-u)e^u\,du$.
4. $h(t) = \displaystyle\int_0^t e^{-(t-u)}\operatorname{sen} u\,du$.

Calcular $y(t)$ en cada uno de los siguientes ejercicios:

5. $y(t) + \displaystyle\int_0^t (t-u)y(u)\,du = 1$.
6. $y'(t) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t (t-u)^2 y(u)\,du = -t$, con $y(0) = 1$.
7. $y(t) = t + \displaystyle\int_0^t y(u)\operatorname{sen}(t-u)\,du$.
8. $y(t) + 2\displaystyle\int_0^t \cos(t-u)y(u)\,du = e^{-t}$.
9. $y'(t) + y(t) = \displaystyle\int_0^t \operatorname{sen}(t-u)y(u)\,du$, con $y(0) = 1$.
10. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = I_0\delta(t)$, con $y(0) = y'(0) = 0$.
11. $2\dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{dy}{dt} + 2y = \delta(t-5)$, con $y(0) = y'(0) = 0$.
12. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 3y = \operatorname{sen} t + \delta(t-3\pi)$, con $y(0) = y'(0) = 0$.

13. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + y = \delta(t - 2\pi)\cos t, \quad \text{con} \quad y(0) = 0 \;\&\; y'(0) = 1.$

14. Una masa de 1 g se sujeta a un resorte cuya constante es $k = 4$ din/cm; la masa se aparta del reposo en $t = 0$ a 3 cm bajo la posición de equilibrio y se deja vibrar sin amortiguamiento ni perturbación hasta que en el instante $t = 2\pi$ se le da un golpe con un martillo que le produce un impulso $p = 8$. Determinar el movimiento de la masa.

Ejercicios 6.7.1 *Teorema de Convolución y la delta de Dirac.* *Página* **??**

1. a. $F(s) = e^{-2(s-1)}$;
   b. $F(s) = e^{-s}$;
   c. $F(s) = 0$.
2. $F(s) = \dfrac{2}{s^2(s^2+4)}$.
3. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s-1)}$.
4. $F(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s^2+1)}$.
5. $y(t) = e^{-t}$.
6. $y(t) = \cos t$.
7. $y(t) = t + \dfrac{t^3}{6}$.
8. $y(t) = (1 - 2t + t^2)e^{-t}$.
9. $y(t) = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{t}{2}} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$.
10. $y(t) = I_0 \operatorname{sen} t$.
11. $y(t) = \dfrac{2}{\sqrt{15}} e^{-\frac{1}{4}(t-5)} \operatorname{sen}\left[\dfrac{\sqrt{15}}{4}(t-5)\right] u(t-5)$.
12. $y(t) = -\dfrac{1}{4}\operatorname{sen} t - \dfrac{1}{4}\cos t + \dfrac{1}{4}e^{-t}\cos(\sqrt{2}t) +$
    $+ \dfrac{1}{\sqrt{2}} e^{-(t-3\pi)} \operatorname{sen}[\sqrt{2}(t-3\pi)]u(t-3\pi)$.
13. $y(t) = \operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(t-2\pi)u(t-2\pi)$.
14. $y(t) = 2e^{-2t} - e^{-t} + 2(e^{-(t-1)} - e^{-2(t-1)})u(t-1) -$
    $- 2(e^{-(t-2)} - e^{-2(t-2)})u(t-2)$.