CAPÍTULO

6

La transformada de Laplace

6.2 Definición de la transformada de Laplace

6.2.1 Definición y primeras observaciones

En la gran mayoría de los sistemas de interés para la física y la ingeniería es posible (al menos en principio) predecir su comportamiento futuro partiendo de condiciones dadas en un determinado tiempo, el cual podemos desde luego suponer que es $t = 0$. Sólo en muy contados ejemplos es factible predecir el comportamiento pasado del sistema. En lo que sigue nos ocuparemos solamente de la parte de las funciones $f(t)$ definida para valores $t \geq 0$, sin darle importancia a lo que sucede para $t < 0$. Con esta aclaración podemos enunciar la siguiente definición de la transformada de Laplace, en ocasiones denominada unilateral:

- La transformada de Laplace (TL) de una función $f(t)$ se define mediante:

  $$\mathcal{L}\{ f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt,$$

  para todos los valores $s \in \mathbb{R}$ para los cuales la integral impropia anterior sea convergente.

- Si $\mathcal{L}\{ f(t)\} = F(s)$, diremos también que $f(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $F(s)$, lo que denotaremos como:

  $$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}.$$

  A esta conexión entre $f(t)$ y $F(s)$ se le suele representar mediante el esquema:

  $$f(t) \longleftrightarrow F(s).$$

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

Observaciones:

1. Recordemos que una integral impropia como la anterior se define como un límite de integrales sobre intervalos finitos, es decir,
$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-st} f(t)\,dt,$$
si el límite existe. El resultado de la integral será en general una función que depende de s. Al calcular una TL no siempre se especifica el rango de valores s para los cuales la integral existe; no obstante en algunos casos es recomendable determinarlo.

2. En ocasiones a esta transformada se le llama unilateral.

   Podemos ampliar la definición dada la TL bilateral. Ésta es
$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt.$$
   No obstante, el manejo y aplicación de ésta tiene otras complicaciones debidas en parte a problemas de convergencia que caen fuera del alcance e interés de este libro.

6.2.2 Cálculo de la TL

Usaremos la definición para calcular la TL de algunas funciones.

Ejemplo 6.2.1 *Calcular la TL de la función escalón unitario*
$$u(t) = \begin{cases} 0, & si\ t < 0; \\ 1, & si\ t \geq 0. \end{cases}$$

▼ Usando la definición de la TL:
$$U(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}u(t)dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{-st}\,dt = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_0^R\right] =$$
$$= \left(-\frac{1}{s}\right)\lim_{R\to\infty}(e^{-sR}-1) = \left(-\frac{1}{s}\right)\lim_{R\to\infty}\left(\frac{1}{e^{sR}}-1\right).$$

Observamos ahora que el límite anterior existe, sólo si $s > 0$. En este caso, $\lim_{R\to\infty} e^{-sR} = \lim_{R\to\infty}\frac{1}{e^{sR}} = 0$, en consecuencia,
$$U(s) = \left(-\frac{1}{s}\right)(-1) = \frac{1}{s}.$$
De esta manera, hemos hallado nuestra primera fórmula de TL:
$$u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s}, \ \text{con } s > 0. \tag{6.1}$$
□

Ejemplo 6.2.2 *Calcular la TL de la función* $f(t) = e^{at}$*, para* $t \geq 0$ *&* $a \in \mathbb{R}$.

▼ Aquí
$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\cdot e^{at}\,dt = \lim_{R\to\infty}\int_0^{R} e^{(a-s)t}\,dt = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{a-s}e^{(a-s)t}\Big|_0^R\right] =$$
$$= \left[\frac{1}{a-s}\right]\lim_{R\to\infty}\left[e^{(a-s)R}-1\right]. \tag{6.2}$$

Al estudiar el límite anterior, concluimos su existencia siempre y cuando $a - s < 0$. En este caso, tenemos que $\lim\limits_{R\to\infty} e^{(a-s)R} = 0$, por lo que:

$$F(s) = \frac{1}{a-s}(-1) = \frac{1}{s-a}, \text{ con } s > a.$$

También podemos escribir:

$$e^{at} \longleftrightarrow \frac{1}{s-a}, \text{ con } s > a. \tag{6.3}$$

□

Ejemplo 6.2.3 *Calcular la TL de la función*

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t}, & \text{si } t < 1; \\ 4, & \text{si } 1 \leq t. \end{cases}$$

▼ Partiendo de la definición de la TL:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^1 e^{-st} e^{2t}\, dt + \int_1^\infty e^{-st} 4\, dt = \int_0^1 e^{(2-s)t}\, dt + 4\int_1^\infty e^{-st}\, dt = \\ &= \frac{e^{(2-s)t}}{2-s}\bigg|_0^1 + 4\lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{-sR}}{-s} - \frac{e^{-s}}{-s}\right) = \frac{e^{2-s}}{2-s} - \frac{1}{2-s} + \frac{4e^{-s}}{s} = \\ &= \frac{1-e^{2-s}}{s-2} + \frac{4e^{-s}}{s}, \text{ para } s > 0 \text{ y } s \neq 2.\end{aligned}$$

Para $s = 2$, se reduce la integral:

$$\begin{aligned}F(2) &= \int_0^\infty e^{-2t} f(t)\, dt = \int_0^1 e^{-2t} e^{2t}\, dt + \int_1^\infty e^{-2t} 4\, dt = \\ &= \int_0^1 dt + 4\int_1^\infty e^{-2t}\, dt = 1 - \lim_{R\to\infty}\left(2e^{-2t}\bigg|_1^R\right) = 1 + 2e^{-2}.\end{aligned}$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \begin{cases} \dfrac{1-e^{2-s}}{s-2} + \dfrac{4e^{-s}}{s}, & \text{si } s > 0 \text{ y } s \neq 2; \\ 1 + 2e^{-2}, & \text{si } s = 2. \end{cases}$$

□

- **Propiedad de linealidad de la TL**

  Una propiedad importante de la TL es la siguiente:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{af(t) \pm bg(t)\} &= \int_0^\infty [af(t) \pm bg(t)]e^{-st}\, dt = a\int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \pm b\int_0^\infty g(t)e^{-st}\, dt = \\ &= a\mathcal{L}\{f(t)\} \pm b\mathcal{L}\{g(t)\} = aF(s) \pm bG(s).\end{aligned}$$

  Es decir:

$$\mathcal{L}\{af(t) \pm bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} \pm \mathcal{L}\{g(t)\}. \tag{6.4}$$

- **Una fórmula recursiva para la TL**

  Hay fórmulas de integración que reducen el resultado de una integral a una integral más sencilla, por lo común mediante una integración por partes. Vamos a calcular $\mathcal{L}\{t^n\}$ (para ello usaremos en el desarrollo):

$$
\begin{aligned}
u &= t^n &&\Rightarrow\ du = nt^{n-1}\,dt;\\
dv &= e^{-st}\,dt &&\Rightarrow\ v = -\frac{e^{-st}}{s}.
\end{aligned}
$$

$$
\mathcal{L}\{\,t^n\} = \int_0^{\infty} e^{-st}t^n\,dt = \int_0^{\infty} t^n e^{-st}\,dt = \lim_{R\to\infty}\left[-\frac{t^n e^{-st}}{s}\,\bigg|_0^R\right] - \int_0^{\infty} -\frac{e^{-st}}{s}nt^{n-1}\,dt =
$$

$$
= -\frac{1}{s}\lim_{R\to\infty}\left[\frac{R^n}{e^{Rs}} - 0\right] + \frac{n}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{n-1}\,dt.
$$

Si aplicamos n-veces la regla de L'Hôpital, entonces, $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\frac{R^n}{e^{sR}} = 0$. Por lo tanto:

$$
\mathcal{L}\{\,t^n\} = \frac{n}{s}\int_0^{\infty} e^{-st}t^{n-1}\,dt, \quad \text{si } s > 0.
$$

Registramos lo anterior como una fórmula recursiva:

$$
\mathcal{L}\{\,t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{\,t^{n-1}\}, \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \cdots \tag{6.5}
$$

Aplicando esta fórmula podemos obtener los siguientes resultados:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\,t^1\} &= \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\,t^0\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{\,1\} = \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2}.\\
\mathcal{L}\{\,t^2\} &= \frac{2}{s}\mathcal{L}\{\,t^1\} = \frac{2}{s}\cdot\frac{1}{s^2} = \frac{2\cdot 1}{s^3}.\\
\mathcal{L}\{\,t^3\} &= \frac{3}{s}\mathcal{L}\{\,t^2\} = \frac{3}{s}\cdot\frac{2\cdot 1}{s^3} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{s^4}.\\
\mathcal{L}\{\,t^4\} &= \frac{4}{s}\mathcal{L}\{\,t^3\} = \frac{4}{s}\cdot\frac{3\cdot 2\cdot 1}{s^4} = \frac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{s^5}.
\end{aligned}
$$

Generalizando, vemos lo siguiente:

$$
\mathcal{L}\{\,t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{6.6}
$$

Ejemplo 6.2.4 *Calcular la TL de la funciones* $f_1(t) = t^3 + 3t$, $f_2(t) = 2t - 5$ & $f_3(t) = 2e^t + 3e^{2t} - e^{-3t}$.

▼ Usando las propiedades anteriores:

$$
\mathcal{L}\{\,t^3 + 3t\} = \mathcal{L}\{\,t^3\} + 3\mathcal{L}\{\,t\} = \frac{3!}{s^4} + 3\frac{1!}{s^2} = \frac{6}{s^4} + \frac{3}{s^2} = \frac{6 + 3s^2}{s^4}.
$$

$$
\mathcal{L}\{\,2t - 5\} = 2\mathcal{L}\{\,t\} - 5\mathcal{L}\{\,u(t)\} = 2\frac{1}{s^2} - 5\frac{1}{s} = \frac{2 - 5s}{s^2}.
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\{\,2e^t + 3e^{2t} - e^{-3t}\} &= 2\mathcal{L}\{\,e^t\} + 3\mathcal{L}\{\,e^{2t}\} - \mathcal{L}\{\,e^{-3t}\} =\\
&= \frac{2}{s-1} + \frac{3}{s-2} - \frac{1}{s+3} = \frac{2(s-2)(s+3) + 3(s-1)(s+3) - (s-1)(s-2)}{(s-1)(s-2)(s+3)} =\\
&= \frac{2(s^2+s-6) + 3(s^2+2s-3) - (s^2-3s+2)}{(s-1)(s-2)(s+3)} = \frac{4s^2 + 11s - 23}{(s-1)(s-2)(s+3)}.
\end{aligned}
$$

De manera similar es posible calcular la TL de cualquier función que sea combinación lineal de potencias enteras de t y exponenciales e^{at}, para $a \in \mathbb{R}$.

□

Hasta el momento, a partir de la definición y primeras propiedades de la TL tenemos una cantidad limitada de funciones cuyas TL podemos calcular. Conforme avancemos en las siguientes secciones se ampliará considerablemente la clase de funciones para las cuales podemos calcular su TL.

6.2.3 Más ejemplos de cálculo de la TL

Al estudiar ED lineales homogéneas con coeficientes constantes, consideramos conveniente introducir los números complejos de la forma $z = \alpha + i\beta$ y las correspondientes fórmulas de Euler como sigue:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta \quad \& \quad e^{-i\theta} = \cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta.$$

Las propiedades de la integral son válidas para constantes complejas, es decir, que si $z = \alpha + i\beta$, entonces:

$$\int z f(t)\,dt = \int (\alpha + i\beta) f(t)\,dt = \alpha \int f(t)\,dt + i\beta \int f(t)\,dt =$$
$$= (\alpha + i\beta) \int f(t)\,dt = z \int f(t)\,dt.$$

Por otro lado, la fórmula

$$\mathcal{L}\{e^{zt}\} = \frac{1}{z-a}$$

es válida con z complejo. Ya que, si $z = \alpha + i\beta$, en la deducción de la fórmula (véase ejemplo 6.2.2), requeriríamos considerar:

$$\lim_{R\to\infty} e^{(z-s)R} = \lim_{R\to\infty} e^{i\beta R} e^{(\alpha-s)R} = 0 \quad \text{cuando } \alpha - s < 0.$$

Así, para que la fórmula anterior sea válida es preciso que su parte real cumpla $Re(z) = \alpha < s$.
Utilicemos ahora las consideraciones previas para resolver los ejemplos siguientes:

Ejemplo 6.2.5 *Calcular la TL de las funciones*

$$f(t) = \cos kt \quad \& \quad f(t) = \mathrm{sen}\,kt \quad \textit{para } k \in \mathbb{R}.$$

▼ Si usamos la observación previa sobre linealidad de la integral con números complejos y la fórmula de Euler:

$$\mathcal{L}\{e^{ikt}\} = \int_0^\infty e^{-st} e^{ikt}\,dt = \int_0^\infty e^{-st}(\cos kt + i\,\mathrm{sen}\,kt)\,dt =$$
$$= \int_0^\infty e^{-st}\cos kt\,dt + i\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{sen}\,kt\,dt = \mathcal{L}\{\cos kt\} + i\,\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,kt\}.$$

También, de acuerdo a lo dicho antes, sobre la transformada de una función con exponente complejo,

$$\mathcal{L}\{e^{ikt}\} = \frac{1}{s-ik} = \frac{1}{s-ik}\left(\frac{s+ik}{s+ik}\right) = \frac{s+ik}{s^2+k^2} = \frac{s}{s^2+k^2} + i\frac{k}{s^2+k^2}.$$

Por lo tanto:

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} + i\,\mathcal{L}\{\mathrm{sen}\,kt\} = \frac{s}{s^2+k^2} + i\frac{k}{s^2+k^2}.$$

De aquí, al igualar las partes reales e imaginarias respectivamente, determinamos que

$$\cos kt \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+k^2}, \quad \text{con } s > 0,$$
$$\mathrm{sen}\,kt \longleftrightarrow \frac{k}{s^2+k^2}, \quad \text{con } s > 0.$$

La validez de estas fórmulas se logra puesto que $Re(ik) = 0 < s$.

□

- Se puede generalizar la fórmula (6.5) para $\mathcal{L}\{t^n\}$ al caso de exponentes no enteros, introduciendo la función Gamma $\Gamma(z)$, estudiada por Euler en el siglo XVIII:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx,$$

que se puede definir para números complejos z, con $Re(z) > 0$, aunque aquí restringimos nuestra atención a $\Gamma(r)$, con $r > 0$. La propiedad que caracteriza a $\Gamma(r)$ es la de generalizar el factorial de enteros positivos, ya que integrando por partes:

$$\Gamma(r+1) = \int_0^\infty e^{-x} x^r\, dx = \lim_{R\to\infty} \left(-e^{-x} x^r \Big|_0^R \right) - \int_0^\infty -e^{-x} r x^{r-1}\, dx = r \int_0^\infty e^{-x} x^{r-1}\, dx = r\Gamma(r).$$

Hemos usado para resolver por partes la primera integral:

$$\begin{cases} u = x^r & \Rightarrow\ du = r x^{r-1}\, dx; \\ dv = e^{-x}\, dx & \Rightarrow\ v = -e^{-x}. \end{cases}$$

De este modo, la fórmula recursiva obtenida

$$\Gamma(r+1) = r\Gamma(r) \tag{6.7}$$

junto con la observación de que $\Gamma(1) = 1$ nos permiten concluir que

$$\begin{aligned} &\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1; \\ &\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2!; \\ &\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2\cdot 1 = 3!; \end{aligned}$$

y en general

$$\Gamma(n+1) = n! \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{6.8}$$

Ejemplo 6.2.6 *Calcular $\mathcal{L}\{t^r\}$, con $r > 0$.*

▼ Aplicando la definición de TL:

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \int_0^\infty e^{-st} t^r\, dt = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^r \left(\frac{dx}{s}\right) = \frac{1}{s^{r+1}} \int_0^\infty e^{-x} x^r\, dx = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}.$$

Donde hemos usado para resolver la primera integral el cambio de variable $x = st$.

□

De aquí que para la función $f(t) = t^r$, con $r > 0$:

$$\mathcal{L}\{t^r\} = \frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}. \tag{6.9}$$

Puesto que, usando (6.8)

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{\Gamma(n+1)}{s^{n+1}} = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

Vemos que la fórmula (6.9) generaliza la anterior (6.6).

- Vamos a demostrar $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

  ▼ Usando la definición de Γ:
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\frac{1}{2}-1}\,dx = \int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx.$$
  Haciendo
$$u = \sqrt{x} \Rightarrow x = u^2 \Rightarrow dx = 2u\,du,$$
  se tiene
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty \frac{e^{-u^2}}{u} 2u\,du = \int_0^\infty 2e^{-u^2}\,du.$$
  Ahora
$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty 2e^{-u^2}\,du \cdot \int_0^\infty 2e^{-v^2}\,dv = 4\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(u^2+v^2)}\,du dv.$$
  Usando coordenadas polares ($u = r\cos\theta$; $v = r\operatorname{sen}\theta$):
$$\Gamma^2\left(\frac{1}{2}\right) = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\infty e^{-r^2} r\,dr d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-r^2}\Big|_0^\infty d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(0 + \frac{1}{2}\right) d\theta = 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi,$$
  de donde
$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$
  □

A partir del resultado anterior, usando (6.7):
$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}.$$
$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}.$$
$$\vdots$$

Ejemplo 6.2.7 *Calcular* $\mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\}$.

▼ Usamos (6.9):
$$\mathcal{L}\left\{t^{\frac{3}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{s^{\frac{5}{2}}} = \frac{\frac{3}{4}\sqrt{\pi}}{\sqrt{s^5}} = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}.$$
□

Ejemplo 6.2.8 *Calcular* $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\}$.

▼
$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{\sqrt{t}}\right\} = \mathcal{L}\left\{t^{-\frac{1}{2}}\right\} = \frac{\Gamma\left(-\frac{1}{2}+1\right)}{s^{-\frac{1}{2}+1}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$
□

Podemos aplicar, entonces, la fórmula para los exponentes r negativos que cumplan $-1 < r < 0$.

Por supuesto, para exponentes r que no sean enteros o múltiplos impares de $\frac{1}{2}$, el cálculo de $\Gamma(r+1)$ puede ser muy complicado y requerir de alguna aproximación numérica.

Ejercicios 6.2.1 *Definición.* *Soluciones en la página 9*
Utilizar la definición para hallar la transformada de Laplace de cada una de las siguientes funciones:

1. $f(t) = e^{\frac{1}{5}t}$.
2. $f(t) = e^{t-2}$.
3. $f(t) = 6 - t^2$.
4. $f(t) = t - 8 + e^t$.
5. $f(t) = \begin{cases} 3t, & \text{si } t < 1; \\ 0, & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$
6. $f(t) = \begin{cases} -t^2 + 3t - 2, & \text{si } 1 \leq t \leq 2; \\ 0, & \text{si } t \notin [1, 2]. \end{cases}$
7. $f(t) = t \cos at;\quad a$ constante.
8. $\cosh kt = \dfrac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} \quad \& \quad \operatorname{senh} kt = \dfrac{e^{kt} - e^{-kt}}{2}$.

Ejercicios 6.2.1 *Definición.* *Página 8*

1. $\dfrac{5}{5s-1}, \quad \text{para } s > \dfrac{1}{5}.$
2. $\dfrac{e^{-2}}{s-1}$, para $s > 1$.
3. $\dfrac{6}{s} - \dfrac{2}{s^3}$, para $s > 0$.
4. $\dfrac{-7s^2 + 9s - 1}{s^2(s-1)}.$
5. $3\left(-\dfrac{1}{s}e^{-s} - \dfrac{1}{s^2}e^{-s} + \dfrac{1}{s^2}\right).$
6. $\dfrac{e^{-s}}{s^3}(s-2) + \dfrac{e^{-2s}}{s^3}(s+2).$
7. $\dfrac{s^2 - a^2}{(s^2+a^2)^2}.$
8. $\mathfrak{L}\{\cosh(kt)\} = \dfrac{s}{s^2-k^2}$; $\mathfrak{L}\{\operatorname{senh}(kt)\} = \dfrac{k}{s^2-k^2}.$