CAPÍTULO

6

La Transformada de Laplace

6.4.5 Derivada de una transformada

Esta propiedad es útil cuando se requiere calcular transformadas inversas de funciones $F(s)$ para las cuales se puede obtener su derivada o su integral definida. Haremos uso de esta propiedad para calcular la TL de funciones trascendentes.

- La propiedad establece:

$$\text{Si } f(t) \longleftrightarrow F(s), \text{ entonces } t^n f(t) \longleftrightarrow (-1)^n F^{(n)}(s), \text{ para } n = 1, 2, 3, \cdots$$

▼ Para demostrar esta propiedad notemos que, bajo condiciones adecuadas, se satisface el siguiente resultado, llamado con frecuencia regla de Leibniz.

$$\frac{d}{ds}\int_0^\infty g(t,s)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial g(t,s)}{\partial s}\,dt.$$

Bajo este supuesto, tenemos entonces:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^\infty \frac{\partial(e^{-st} f(t))}{\partial s}dt = \int_0^\infty -e^{-st} t f(t)\,dt = -\mathcal{L}\{ t f(t)\}.$$

Es decir:

$$\mathcal{L}\{ t f(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{ f(t)\}. \tag{6.1}$$

De manera similar,

$$\mathcal{L}\left\{ t^2 f(t)\right\} = \mathcal{L}\{ t \cdot t f(t)\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\{ t f(t)\} = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}F(s)\right) = \frac{d^2}{ds^2}F(s).$$

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

Continuando con el razonamiento, podemos concluir en general:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s). \tag{6.2}$$

O de otra forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{ F^{(n)}(s)\right\} = (-1)^n t^n f(t). \tag{6.3}$$

□

Ejemplo 6.4.1 *Calcular* $\mathcal{L}\{t \cosh 2t\}$.

▼ Si escribimos

$$F(s) = \mathcal{L}\{\cosh 2t\} = \frac{s}{s^2-4},$$

Directamente de la propiedad se desprende que

$$\mathcal{L}\{t\cosh 2t\} = -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2-4}\right) = -\frac{s^2-4-s(2s)}{(s^2-4)^2} = -\frac{s^2-4-2s^2}{(s^2-4)^2} = \frac{s^2+4}{(s^2-4)^2}.$$

□

Ejemplo 6.4.2 *Calcular* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{(s^2+1)^2}\right\}$.

▼ En primer lugar buscaremos una función $F(s)$ tal que $F'(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^2}$. Tenemos:

$$F(s) = \frac{1}{2}\int (s^2+1)^{-2}(2s\,ds) = -\frac{1}{2(s^2+1)}\,.$$

Donde, sin pérdida de generalidad (ver el siguiente desarrollo) podemos tomar la constante de integración como cero. De esta forma:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{2(s^2+1)}\right)\right\} = \left(-\frac{1}{2}\right)(-1)t\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} = \frac{t}{2}\operatorname{sen} t.$$

Observemos la posición del factor (-1). Es decir,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2+1)^2}\right\} = \frac{t\operatorname{sen} t}{2}.$$

□

Ejemplo 6.4.3 *Calcular* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\dfrac{1}{s}\right)\right\}$.

▼ Estamos buscando $f(t)$ tal que $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\arctan\left(\dfrac{1}{s}\right)\right\}$.

Si consideramos que $F(s) = \arctan\left(\dfrac{1}{s}\right)$, al derivar, hallamos:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \underbrace{\frac{-s^{-2}}{1+\left(\dfrac{1}{s}\right)^2}}_{(*)} = -\frac{1}{s^2+1}\,;$$

donde hemos multiplicado numerador y denominador en $(*)$ por s^2.

Si usamos la propiedad 6.1, tenemos:

$$\mathcal{L}\{\, tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) = \frac{1}{1+s^2} = \mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\}.$$

Entonces por el teorema de Lerch:

$$tf(t) = \operatorname{sen} t \;\Rightarrow\; f(t) = \frac{\operatorname{sen} t}{t}.$$

$\square$

Ejemplo 6.4.4 *Determinar* $\mathcal{L}^{-1}\{\ln s\}$.

▼ Si escribimos $F(s) = \ln s$, tenemos:

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\ln s = \frac{1}{s}.$$

Así, por la propiedad de derivación de una transformada:

$$\mathcal{L}\{\, tf(t)\} = -\frac{d}{ds}F(s) = -\frac{1}{s} = \mathcal{L}\{-1\}, \quad \text{donde } f(t) \longleftrightarrow F(s).$$

Tenemos, por el teorema de Lerch:

$$tf(t) = -1 \;\Rightarrow\; f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\ln s\} = -\frac{1}{t}.$$

$\square$

Ejercicios 6.4.5 *Derivada de una transformada.* *Soluciones en la página 4*
Calcular $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$ *o bien* $\mathcal{L}\{f(t)\}$ *según sea el caso.*

1. $f(t) = t \operatorname{sen} at$.
2. $f(t) = t \cos at$.
3. $F(s) = \ln\left(\dfrac{s+1}{s-1}\right)$.
4. $f(t) = t^2 \operatorname{senh} t$ & $f(t) = t^2 \cosh t$.

Ejercicios 6.4.5 *Derivada de una transformada.* *Página 3*

1. $\mathfrak{L}\{\,t\ \mathrm{sen}(at)\} = \dfrac{2as}{(s^2+a^2)^2}$.
2. $\mathfrak{L}\{\,t\cos at\} = \dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$.
3. $f(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{t}$.
4. $\mathfrak{L}\left\{t^2 \,\mathrm{senh}\, t\right\} = \dfrac{6s^2+2}{(s^2-1)^3}$;

   $\mathfrak{L}\left\{t^2 \cosh t\right\} = \dfrac{2s^3+6s}{(s^2-1)^3}$.