CAPÍTULO

6

La transformada de Laplace

6.3 Existencia de TL

Los resultados encontrados en las secciones anteriores nos podrían hacer pensar que bastará cuidar el rango de la variable s para asegurar la existencia de la TL de una función; sin embargo, para algunas funciones éste no es el caso. Consideremos el siguiente ejemplo para ilustrar esa posibilidad.

Ejemplo 6.3.1 *Mostrar que no existe la TL de la función $f(t) = e^{t^2}$ para ningún valor de s.*

▼ Por la definición de la TL, se tiene:

$$\mathcal{L}\{e^{t^2}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}\,dt.$$

1. Primero veremos que la integral siguiente diverge:

$$\int_1^\infty e^{v^2}\,dv.$$

En efecto, puesto que $e^{v^2} > e^{v}$ en $(1, \infty)$, entonces:

$$\int_1^\infty e^{v^2}\,dv \geq \int_1^\infty e^{v}\,dv = \infty.$$

2. Si $s > 0$,

$$\mathcal{L}\{e^{t^2}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}\,dt = \int_0^\infty e^{t^2-st}\,dt = \int_0^\infty e^{t^2-st+\frac{s^2}{4}}e^{-\frac{s^2}{4}}\,dt =$$
$$= \int_0^\infty e^{\left(t-\frac{s}{2}\right)^2}e^{-\frac{s^2}{4}}\,dt = \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}}\int_0^\infty e^{\left(t-\frac{s}{2}\right)^2}\,dt.$$

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

Si usamos $v = t - s/2$,

$$\mathfrak{L}\{e^{t^2}\} = \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}}\int_{-s/2}^{\infty} e^{v^2}\,dv = \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}}\left[\int_{-s/2}^{1} e^{v^2}\,dv + \int_{1}^{\infty} e^{v^2}\,dv\right] \geq$$
$$\geq \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}}\left[\int_{0}^{1} e^{v^2}\,dv + \int_{1}^{\infty} e^{v^2}\,dv\right] \geq \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}}\left[\int_{1}^{\infty} e^{v^2}\,dv\right] \geq \frac{1}{e^{\frac{s^2}{4}}}\left[\int_{1}^{\infty} e^{v}\,dv\right] = \infty.$$

□

El ejemplo anterior muestra que la TL de $f(t) = e^{t^2}$ no existe por el gran crecimiento que tiene esta función cuando $t \to \infty$, comparado con el decrecimiento de e^{-st} en la misma situación al infinito. La función e^{t^2} domina a e^{-st} para cualquier valor de s, de modo que e^{t^2-st} será positiva y creciente cuando $t \to \infty$. Por ello la integral $\int_1^{\infty} e^{t^2-st}\,dt$ diverge. Es importante recalcar que el gran crecimiento de e^{t^2} cuando $t \to \infty$ es la causa de la divergencia y no la función en un intervalo limitado. El siguiente ejemplo muestra que e^{t^2} puede tener TL, si se restringe a un intervalo finito.

Ejemplo 6.3.2 *Mostrar que la función* $f(t) = \begin{cases} ke^{t^2}, & \text{si } t < B \\ 10^M, & \text{si } t \geq B \end{cases}$ *sí tiene TL, donde* k, M & B *son constantes.*

▼ Usando la definición de la TL:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{L}\{f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\,dt = \int_0^{B} e^{-st} k e^{t^2}\,dt + \int_B^{\infty} e^{-st}(10^M)\,dt = \\
&= k\int_0^{B} e^{-st+t^2}\,dt + \left(10^M\right)\lim_{R\to\infty}\int_B^{R} e^{-st}\,dt = \\
&= k\int_0^{B} e^{t^2-st}\,dt + 10^M \lim_{R\to\infty}\left(\frac{e^{-sR}}{-s} + \frac{e^{-sB}}{s}\right) = \\
&= 10^M \lim_{R\to\infty}\left(\frac{-1}{se^{sR}} + \frac{e^{-sB}}{s}\right) + k\int_0^{B} e^{t^2-st} e^{\frac{s^2}{4}} e^{-\frac{s^2}{4}}\,dt = \\
&= \frac{10^M e^{-sB}}{s} + ke^{-\frac{s^2}{4}}\int_0^{B} e^{\left(t^2-st+\frac{s^2}{4}\right)}\,dt = \\
&= \frac{10^M e^{-sB}}{s} + ke^{-\frac{s^2}{4}}\int_0^{B} e^{\left(t-\frac{s}{2}\right)^2}\,dt.
\end{aligned}$$

El valor obtenido así será finito y bien definido, sin importar cuán grandes puedan ser M, B o k, para cualquier $s > 0$. La última integral, si bien no puede calcularse mediante funciones elementales, se puede acotar: si $m(s) = \text{máx}\left(t - \frac{s}{2}\right)^2$ para $0 \leq t \leq B$, entonces:

$$\int_0^{B} e^{\left(t-\frac{s}{2}\right)^2}\,dt \leq \int_0^{B} e^{m(s)}\,dt = e^{m(s)}B.$$

De este modo, la TL de esta función existe para cualquier $s > 0$.

□

Ejemplo 6.3.3 *Mostrar que la función* $f(t) = \begin{cases} \tan t, & si\ 0 \le t < \dfrac{\pi}{2} \\ 0, & si\ t \ge \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$ *no tiene TL.*

▼ Hagamos una estimación de la TL. Sea $m(s) = \min\limits_{0 \le t \le \frac{\pi}{2}} \left\{ e^{-st} \right\} = \min \left\{ 1, e^{-s\frac{\pi}{2}} \right\}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-st} \tan t\, dt \ge \int_0^{\frac{\pi}{2}} m(s) \tan t\, dt =$$

$$= m(s) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan t\, dt = m(s) \lim_{R \to \frac{\pi}{2}} \int_0^{R} \tan t\, dt =$$

$$= m(s) \lim_{R \to \frac{\pi}{2}} [\ln(\sec R) - \ln(\sec 0)] = +\infty.$$

Recuerde que la función $\tan t$ tiene una asíntota vertical en $t = \dfrac{\pi}{2}$.

□

Los ejemplos anteriores nos llevan al cuestionamiento de las condiciones que podrían garantizar la existencia de la TL de una función. Un resultado en este sentido es el que se enuncia en el siguiente teorema cuya demostración omitimos.

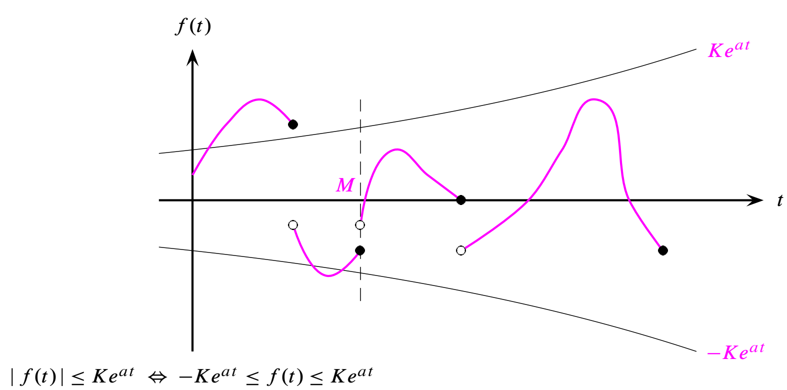
Teorema 6.1 *Condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Laplace*
Sea f una función que cumple las siguientes condiciones:

1. *Es seccionalmente continua sobre el intervalo $t \le A$ para cualquier $A > 0$, esto es, posee a lo más un número finito de discontinuidades de salto en dicho intervalo.*
2. *Es de orden exponencial para $t \ge M$, es decir,*

$$|\, f(t)\, | \le K e^{at} \text{ para } t \ge M \text{ donde} K, a\ \&\ M \text{ son constantes.} \tag{6.1}$$

Entonces $\mathcal{L}\{ f(t)\} = F(s)$ existe para $s > a$.

Funciones $f(t)$ que satisfacen a las condiciones del teorema anterior se denominan funciones seccionalmente continuas de orden exponencial.
El orden exponencial que se exige a la función sólo se requiere a partir de $t \ge M$; puede suceder que en el intervalo $t < M$ no se cumpla la desigualdad (6.1) para algunas $t < M$, sin embargo, esto no es importante pues no afecta la existencia de $\mathcal{L}\{ f(t)\}$.
La siguiente gráfica ilustra las dos condiciones anteriores.



Unicidad de la TL

Hemos escrito anteriormente $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ para indicar que $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$ y también $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$. Esta práctica se apoya en la presunción de que la TL de funciones distintas debe dar como resultado funciones también diferentes.
Si dos funciones $f(t)$ y $g(t)$ tienen la misma TL, es decir, cumplen

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g(t)\},$$

tenemos, por la linealidad de la TL, que:

$$\mathcal{L}\{f(t) - g(t)\} = 0.$$

Es decir, para que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ tengan la misma TL se debe cumplir:

$$\int_0^{\infty} e^{-st}[f(t) - g(t)]\,dt = 0.$$

Dado que la función exponencial siempre es positiva, esta integral nos indica que $f(t)$ y $g(t)$ son esencialmente iguales. Un análisis más preciso de este concepto nos lleva al siguiente resultado:

Teorema 6.2 *de Lerch sobre Unicidad*
Sean f & g dos funciones seccionalmente continuas de orden exponencial con

$$f(t) \longleftrightarrow F(s) \quad \& \quad g(t) \longleftrightarrow G(s).$$

Supóngase que existe $s_0 \in \mathbb{R}$ tal que las $F(s) = G(s)$ para todo $s > s_0$. Entonces, $f(t) - g(t)$ es una función nula, en el sentido de que

$$\int_0^{a} [f(t) - g(t)]\,dt = 0 \quad \text{para todo } a > 0;$$

en particular en los puntos de continuidad de ambas funciones se tiene $f(t) = g(t)$.

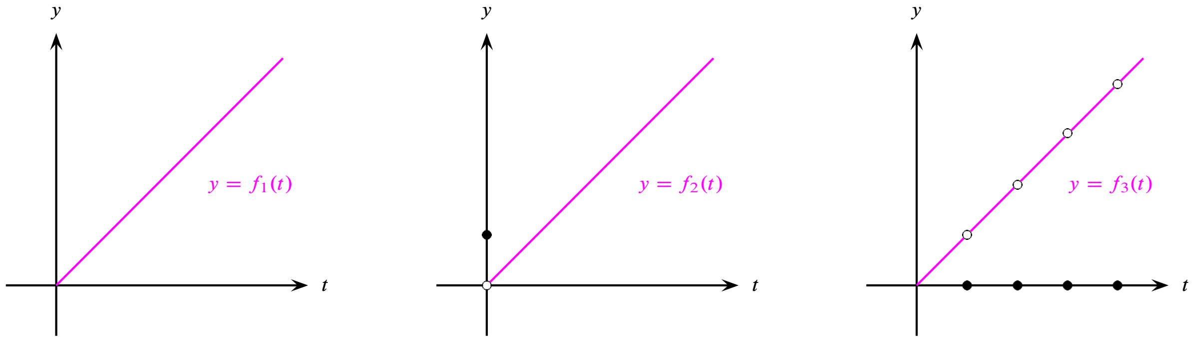
La conclusión del teorema sobre la igualdad de f & g se enuncia a menudo diciendo que f & g son iguales para casi todo t; esto es, para todo t, excepto posiblemente en los puntos de discontinuidad, que son una cantidad finita o numerable. El teorema de Lerch asegura que dos funciones que tengan la misma TL son esencialmente iguales. De esta forma, tiene sentido hablar de la transformada inversa $\mathcal{L}^{-1}$ de una función, teniendo en cuenta que hay una unicidad esencial.

Ejemplo 6.3.4 *Observe que las funciones*

1. $f_1(t) = t$;
2. $f_2(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \neq 0; \\ 1, & \text{si } t = 0; \end{cases}$
3. $f_3(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t \text{ no es entero;} \\ 0, & \text{si } t = 0, 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$

tienen todas la misma TL, a saber $F(s) = \dfrac{1}{s^2}$.

▼ Las gráficas de estas funciones se presentan a continuación



□

Ejercicios 6.3.1 *Existencia de la TL.* *Soluciones en la página 6*

1. ¿Cuáles de las siguientes funciones cumplen las condiciones suficientes para la existencia de la TL?

   a. $f(t) = e^{2t}\cos 3t$.

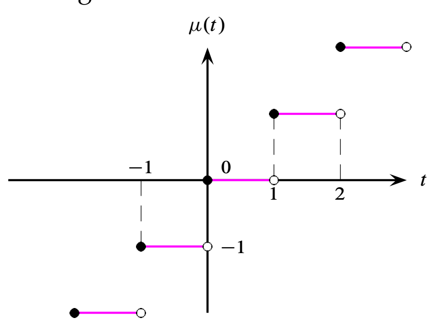
   b. $g(t) = \Gamma(t) = \int_0^\infty u^{t-1}e^{-u}\,du$.

   c. $h(t) = \cot t$.

   d. $\phi(t) = \begin{cases} t\csc t, & \text{si } 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}; \\ e^{t-1}, & \text{si } t > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

   e. $\psi(t) = \begin{cases} te, & \text{si } t \le 1; \\ e^{t^2}, & \text{si } t > 1. \end{cases}$

   f. $\mu(t) = \lfloor t \rfloor$. Máximo entero menor o igual a t.



2. Suponga que dos funciones f & g cumplen que $f(t) \longleftrightarrow F(s)$ & $g(t) \longleftrightarrow G(s)$, donde:

$$F(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+4}, \text{ con } s > 0; \quad G(s) = \frac{e^{-s}}{s^2+4}, \text{ con } s > 2.$$

¿Qué se puede concluir acerca de f & g?

Ejercicios 6.3.1 *Existencia de la TL.* *Página 5*

1. a. Sí;
   b. no;
   c. no;
   d. sí;
   e. no;
   f. sí.
2. $f(t)$ y $g(t)$ son iguales casi dondequiera.