CAPÍTULO

6

La Transformada de Laplace

6.4.7 Integral de una transformada

- Estableceremos ahora la siguiente propiedad:

$$\text{Si } f(t) \longleftrightarrow F(s), \text{ entonces } \mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)du.$$

▼ Para convencernos de la validez de esta fórmula, observemos que, por una parte para $t > 0$:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\left\{t\left(\frac{1}{t}\right)f(t)\right\} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\} \Rightarrow \frac{d}{ds}\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\} = -F(s). \tag{6.1}$$

Por otra parte, usando el teorema Fundamental del Cálculo:

$$\frac{d}{ds}\int_s^{\infty} F(u)\,du = -\frac{d}{ds}\int_{\infty}^{s} F(u)\,du = -F(s). \tag{6.2}$$

De (6.1) y (6.2) se sigue que, como $\mathcal{L}\left\{\frac{1}{t}f(t)\right\}$ y $\int_s^{\infty} F(u)\,du$ tienen la misma derivada, entonces deben ser iguales, excepto posiblemente por una constante aditiva. Que dicha constante es cero se puede ver tomando el límite, cuando $s \to \infty$

$$\lim_{s\to\infty}\int_0^{\infty}\frac{f(t)}{t}e^{-st}\,dt = \lim_{s\to\infty}\left(\int_s^{\infty} F(u)\,du + C\right) \Rightarrow 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0.$$

Cabe señalar que una premisa para la validez de este argumento es que la función F debe ser continua para todo s mayor que algún número real a.

□

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

Ejemplo 6.4.1 *Hallar la TL de* $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$ *y, a partir del resultado obtenido, determinar el valor de la integral impropia*

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t}\, dt.$$

▼ Tenemos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \int_s^{\infty} F(u)\, du = \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = \lim_{R\to\infty} \arctan u \,\Big|_s^R =$$
$$= \lim_{R\to\infty} (\arctan R - \arctan s) = \frac{\pi}{2} - \arctan s.$$

Para determinar la integral impropia relacionamos el resultado anterior con la definición de TL y hallamos:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right\} = \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{-st}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan s.$$

Si en el resultado anterior tomamos $s = 0$, obtenemos:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} e^{-0t}\, dt = \frac{\pi}{2} - \arctan 0,$$

de donde:

$$\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

□

Ejercicios 6.4.7 *Integral de una transformada.* *Soluciones en la página 3*
En cada uno de los ejercicios, calcular $\mathcal{L}\{ f(t)\}$ *o bien* $\mathcal{L}^{-1}\{ F(s)\}$.

1. $f(t) = \dfrac{1-\cos 3t}{t}$.
2. $f(t) = \dfrac{e^{-3t}\operatorname{sen} 2t}{t}$.
3. $f(t) = \dfrac{\operatorname{senh} t}{t}$.
4. $F(s) = \dfrac{2s}{(s^2-1)^2}$.

Ejercicios 6.4.7 *Integral de una transformada.* *Página 2*

1. $\mathcal{L}\left\{\dfrac{1-\cos 3t}{t}\right\} = \ln\left(\dfrac{\sqrt{s^2+9}}{s}\right)$.

2. $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^{-3t}\operatorname{sen} 2t}{t}\right\} = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{s+3}{2}\right)$.

3. $\mathcal{L}\left\{\dfrac{\operatorname{senh} t}{t}\right\} = \ln\sqrt{\dfrac{s-1}{s+1}}$.

4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{2s}{(s^2-1)^2}\right\} = t\operatorname{senh} t$.