CAPÍTULO

6

La transformada de Laplace

6.1 Introducción

En este capítulo presentamos un método de solución de ecuaciones diferenciales llamado transformada de Laplace (denotado con la abreviatura TL o con el símbolo $\mathcal{L}$). La TL es una poderosa herramienta utilizada con mucha frecuencia en física, matemáticas e ingeniería, para el análisis y solución de diversos problemas, como por ejemplo, el cálculo de integrales impropias, análisis de señales y sistemas, entre otros. La TL se denomina así en honor al matemático Pierre-Simon Laplace, quien la definió a finales del siglo XVIII, aunque no la utilizó para resolver ecuaciones diferenciales. Casi 100 años después, Oliver Heaviside (1850-1925), un ingeniero inglés famoso por sus aportaciones a la teoría electromagnética, creó el cálculo operacional donde la TL desempeña un papel preponderante. Al aplicar este cálculo operacional para la solución de ED se obtuvieron métodos complementarios a los métodos de solución conocidos en esa época (como los que hemos visto en los capítulos anteriores). A reserva de describir con mayor detalle el proceso posteriormente, podemos adelantar de momento que el método de la TL para resolver ecuaciones diferenciales consiste en trasladar un problema de valor inicial a un ámbito diferente, generalmente algebraico, en donde la TL de la solución buscada se puede despejar y la solución del PVI se obtendrá aplicando una trasformación inversa a la transformada de Laplace.

$$\begin{tikzcd} \boxed{\text{Problema de valores iniciales (PVI)}} \arrow[r, bend left, "\mathcal{L}"] & \boxed{\text{Problema algebraico}} \arrow[l, bend left, "\mathcal{L}^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Aplicar este método para resolver ED presupone un manejo fluido de la TL y su inversa, y el objetivo de este capítulo es lograr que el lector adquiera y desarrolle habilidades para el cálculo de ambos tipos de transformaciones en la solución de ED.

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

Motivación y ejemplos

Una pregunta que el lector podría estarse haciendo es ¿qué necesidad hay de aprender un nuevo método como el de la TL, si ya hemos visto otros bastante efectivos para resolver ED? Para tener una respuesta completa habría que estudiar todo el presente capítulo, pero podemos ya avanzar que con la TL se pueden resolver aquellos problemas de ED que con los métodos tradicionales sería muy difícil o imposible abordar.

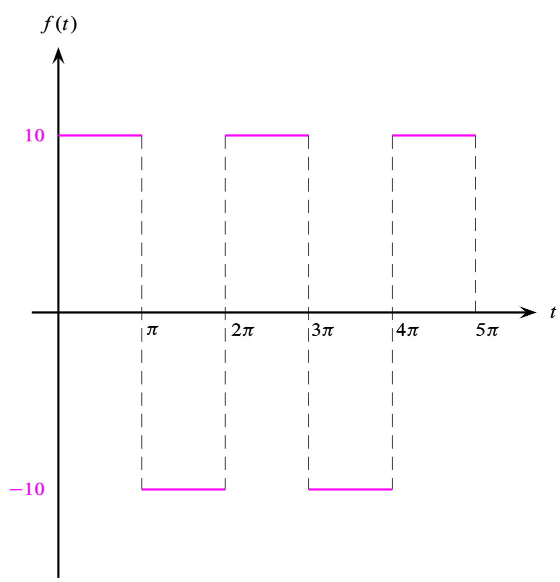
Aunque sobre la TL hay muchas más aplicaciones de las que se presentan en este libro, ofrecemos a continuación un conjunto de problemas para los cuales los métodos vistos hasta ahora no proporcionan un método adecuado de solución. Sólo hemos considerado, en capítulos previos, algunos casos en que la fuerza externa en

$$ay'' + by' + cy = f(t)$$

es por lo menos continua en el intervalo donde se requiere resolver la ED. Los ejemplos siguientes incluyen funciones con discontinuidades de salto, ecuaciones integro-diferenciales y la delta de Dirac, que no es siquiera una función como se entiende usualmente. Se sigue entonces que hace falta ampliar el alcance de los métodos hasta ahora desarrollados, lo cual conseguiremos con la TL.

Sistemas oscilatorios con fuerzas de excitación discontinuas

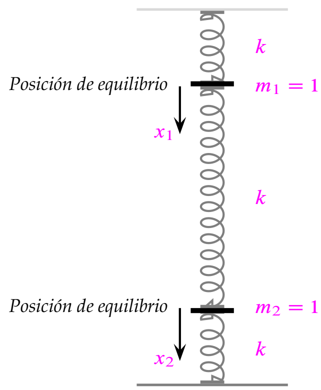
Ejemplo 6.1.1 *Consideremos un sistema masa-resorte con $m = 2$ kg, $c = 4$ N·m/s y $k = 10$ N/m. Supongamos que el sistema está inicialmente en reposo y en equilibrio por lo cual $x(0) = x'(0) = 0$, y que la masa es impulsada por una fuerza de excitación $f(t)$ cuya gráfica se muestra en la figura siguiente; se trata de una onda cuadrada con amplitud de 10 N y periodo igual a 2π. Encontrar la posición de la masa en cualquier instante.*



Observamos que la función $f(t)$ no es continua.

Sistemas acoplados que llevan a sistemas de ecuaciones diferenciales

Ejemplo 6.1.2 *Dos masas iguales de 1 kg se encuentran vinculadas mediante 3 resortes de masas despreciables y constantes de restitución k, como se muestra en la figura siguiente. Determinar la posición de cada masa en cualquier instante, si $k = 3$ N/m. (Este ejemplo se amplía y detalla en el ejemplo* **??***.)*



Este modelo comprende dos variables $x_1(t)$ & $x_2(t)$. Es de esperarse que el modelo requiera de un sistema de ED.

Ecuaciones integro-diferenciales

Como hemos discutido en el capítulo anterior, para un circuito en serie RLC, la aplicación del principio de conservación de la energía nos lleva a una de las leyes de Kirchoff:
La suma de las caídas de voltaje a través de los elementos de un circuito eléctrico es igual al voltaje aplicado.
En símbolos:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = V(t),$$

donde la resistencia R se mide en ohms (Ω), la inductancia L en henrys (H), la capacitancia C en farads (F), y el voltaje aplicado V en volts (V).
Observemos que tanto Q como I son funciones definidas para $t \geq 0$ con derivadas continuas. Se considera que el capacitor se encuentre sin carga en el tiempo $t = 0$.
Por otro lado, por el teorema Fundamental del Cálculo, es posible plantear que

$$Q(t) = \int_0^t I(t)\,dt,$$

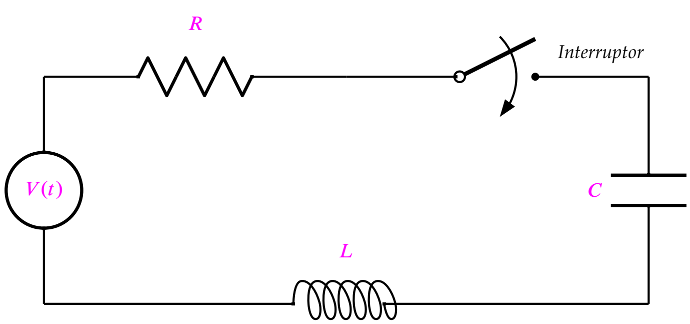
por lo cual podemos reescribir la ecuación del circuito en serie RLC como:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I(t) = V(t).$$

Ecuaciones de este tipo se denominan ecuaciones integro-diferenciales. La TL nos permite resolver este tipo de ecuaciones de manera sistemática.

Ejemplo 6.1.3 *Calcular la corriente en un circuito en serie RLC cuyos componentes son: una resistor de* $2\,\Omega$*, un inductor de* 1 *H, un capacitor de* 1 *F y una fuente de voltaje que suministra (en voltios):*

$$V(t) = \begin{cases} t, & \text{si } t < 1; \\ 2 - t, & \text{si } 1 \leq t \leq 2; \\ 0, & \text{si } t > 2. \end{cases}$$



No olvide que la ED que vamos a resolver contiene derivadas e integrales y la fuente de voltaje es una función definida por partes.

Ecuaciones diferenciales en las que interviene una función impulso

En ingeniería resulta de interés el análisis y la correspondiente solución de sistemas masa-resorte, circuitos eléctricos y cargas mecánicas (tal vez sobre vigas) donde se produce algún impulso o alguna colisión, lo cual ocurre cuando una fuerza relativamente grande actúa en un tiempo considerablemente pequeño.
Casos típicos de estas situaciones son las colisiones entre partículas elementales, el golpe de un bate sobre una pelota de beisbol, un peso grande concentrado en un punto de una viga por un intervalo de tiempo corto, una fuerza electromotriz que cambia repentinamente en un intervalo pequeño de tiempo por efecto, tal vez, de un rayo, entre otros.
En tales situaciones, a menudo ocurre que el principal efecto de la fuerza depende sólo del valor de la integral

$$p = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt,$$

El número p anterior se llama impulso de la fuerza $f(t)$ en el intervalo $[t_1, t_2]$ y la fuerza $f(t)$ se describe por $f(t) = p\delta(t - t_0)$ donde $\delta(t - t_0)$ se conoce como delta de Dirac.

Ejemplo 6.1.4 *Una masa unida a un resorte se libera desde el reposo a* 2 *m por debajo de la posición de equilibrio y comienza a vibrar. Después de* 5 *s, la masa recibe un golpe que suministra un impulso (momento lineal) sobre la masa de* 8 *N·s dirigido hacia abajo. El modelo que describe la situación queda de la siguiente manera:*

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 8\,\delta(t - 5), \quad \text{con } x(0) = 2 \quad \& \; x'(0) = 0.$$

Hallar la posición de la masa en cualquier instante. (Este ejemplo se amplía y detalla en el ejemplo **??***.)*

Observación. El lado derecho de esta ED es esta función delta que no es una función como las que hemos considerado hasta ahora: no es diferenciable ni continua.