

CAPÍTULO

6

La transformada de Laplace

6.4 Propiedades de la TL

Con las propiedades de \mathcal{L} y las TL de funciones particulares que hemos visto hasta el momento, nos encontramos en posición de poder calcular la TL de una buena cantidad de funciones; esta situación, si bien satisfactoria, aún no es del todo suficiente para nuestros propósitos de aplicar \mathcal{L} a la solución de ED.

La siguiente tabla contiene la TL de funciones que hemos visto y algunas otras que veremos en esta sección.

La transformada de Laplace			
	Función		Transformada
	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$	\longleftrightarrow	$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$
Fórmulas básicas			
1	1	\longleftrightarrow	$\frac{1}{s}$
2	t	\longleftrightarrow	$\frac{1}{s^2}$
3	$t^n; \quad n = 1, 2, \dots$	\longleftrightarrow	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
4	$\frac{1}{\sqrt{t}}$	\longleftrightarrow	$\sqrt{\pi} \frac{1}{\sqrt{s}}$
5	t^r	\longleftrightarrow	$\frac{\Gamma(r+1)}{s^{r+1}}$
6	e^{at}	\longleftrightarrow	$\frac{1}{s-a}$
7	$\cos kt$	\longleftrightarrow	$\frac{s}{s^2+k^2}$
8	$\text{sen } kt$	\longleftrightarrow	$\frac{k}{s^2+k^2}$
9	$\cosh kt$	\longleftrightarrow	$\frac{s}{s^2-k^2}$
10	$\text{senh } kt$	\longleftrightarrow	$\frac{k}{s^2-k^2}$
11	$t^n e^{at}$	\longleftrightarrow	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
12	$e^{at} \text{sen } bt$	\longleftrightarrow	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2}$
13	$e^{at} \cos bt$	\longleftrightarrow	$\frac{(s-a)}{(s-a)^2+b^2}$
14	$u(t-a)$	\longleftrightarrow	$\frac{e^{-as}}{s}$

A continuación enlistamos algunas propiedades adicionales que obtendremos en esta sección:

Propiedades de la TL				
1	Linealidad	$af(t) \pm bg(t)$	\longleftrightarrow	$aF(s) \pm G(s)$
2	Cambio de escala	$f(at)$	\longleftrightarrow	$\frac{1}{a}F\left(\frac{s}{a}\right)$
3	Primera propiedad de traslación	$e^{at}f(t)$	\longleftrightarrow	$F(s-a)$
4	Segunda propiedad de traslación	$u(t-a)f(t-a)$	\longleftrightarrow	$e^{-as}F(s)$
5	Transformada de una derivada	$f'(t)$	\longleftrightarrow	$sF(s) - f(0)$
		$f''(t)$	\longleftrightarrow	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
		$f^{(n)}(t)$	\longleftrightarrow	$s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
6	Derivada de una transformada	$tf(t)$	\longleftrightarrow	$-F'(s)$
7	Transformada de una integral	$\int_0^t f(u)du$	\longleftrightarrow	$\frac{F(s)}{s}$
8	Integral de una transformada	$\frac{f(t)}{t}$	\longleftrightarrow	$\int_s^\infty F(u)du$

De aquí en adelante, usaremos indistintamente la notación:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) \quad \text{o bien} \quad f(t) \longleftrightarrow F(s).$$

Conservaremos también la relación entre minúsculas y mayúsculas para relacionar a la transformada de una función con su transformada inversa. Así mismo, en cada una de las funciones involucradas en las propiedades, supondremos que se satisfacen las condiciones de suficiencia para la existencia de la TL.