CAPÍTULO

# 6

# La transformada de Laplace

### 6.4.4 Transformada de una derivada

La siguiente propiedad nos permite aplicar la TL a la solución de una ED.
Si $f(t)$ es una función con derivada $f'(t)$, entonces:

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\,dt = \lim_{R\to\infty} \left[e^{-st} f(t)\right]\Big|_0^R - \int_0^\infty f(t)(-se^{-st}\,dt).$$

Hemos integrado por partes con:

$$\begin{aligned} u &= e^{-st} & \Rightarrow \quad du &= -se^{-st}\,dt; \\ dv &= f'(t) & \Rightarrow \quad v &= f(t). \end{aligned}$$

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \underbrace{\lim_{R\to\infty} e^{-sR} f(R)}_{\to 0} - \lim_{t\to 0^+} e^{-st} f(t) + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt = sF(s) - f(0^+).$$

en donde el primer límite ($R \to \infty$) se anula, y hemos denotado al segundo ($t \to 0^+$) por $f(0^+)$, ya que puede ser que $f$ no esté definida en $t = 0$, en cuyo caso se debe calcular su límite cuando $t \to 0$ por la derecha; siempre que no haya confusión escribiremos $f(0)$ en lugar de $f(0^+)$.
Es decir,

$$\mathcal{L}\left\{\frac{df(t)}{dt}\right\} = \mathcal{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0). \tag{6.1}$$

Utilizando la fórmula (6.1) de nuevo, vemos que, si $f$ y sus derivadas tienen TL, se puede calcular:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f''(t)\} = \mathcal{L}\left\{\frac{df'(t)}{dt}\right\} &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0) = s\left[sF(s) - f(0)\right] - f'(0) = \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \end{aligned}$$

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

Es decir:

$$\mathcal{L}\{ f''(t)\} = s^2F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{6.2}$$

Así también:

$$\mathcal{L}\{ f^{(3)}(t)\} = \mathcal{L}\left\{ \frac{d}{dt}(f''(t))\right\} = s\mathcal{L}\{ f''(t)\} - f''(0) = s\left[s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\right] - f''(0) =$$
$$= s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0).$$

Entonces:

$$\mathcal{L}\{ f^{(3)}(t)\} = s^3F(s) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0). \tag{6.3}$$

Siguiendo este razonamiento, obtenemos en general:

$$\mathcal{L}\{ f^{(n)}(t)\} = s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0). \tag{6.4}$$

**Ejemplo 6.4.1** *Calcular $\mathcal{L}\{\cos t\}$, usando la fórmula de la transformada de una derivada.*

▼ Como es bien sabido $\dfrac{d}{dt}\operatorname{sen} t = \cos t$, entonces:

$$\mathcal{L}\{\cos t\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}\operatorname{sen} t\right\} = s\mathcal{L}\{\operatorname{sen} t\} - \operatorname{sen} 0 = \frac{s}{s^2+1}.$$

□

**Ejemplo 6.4.2** *Calcular $\mathcal{L}\{t^n\}$, usando la fórmula de la transformada de una derivada.*

▼ Como $\dfrac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$, por la fórmula de la trasformación de una derivada, tenemos:

$$\mathcal{L}\{nt^{n-1}\} = \mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}t^n\right\} = s\mathcal{L}\{t^n\} - t^n\Big|_{t=0};$$

es decir,

$$n\mathcal{L}\{t^{n-1}\} = s\mathcal{L}\{t^n\} \Rightarrow \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n}{s}\mathcal{L}\{t^{n-1}\}.$$

La misma fórmula recursiva (**??**) que obtuvimos en la página **??**.

□

**Ejemplo 6.4.3** *Determinar la TL de la función $y(t)$, solución del PVI*

$$y'' + ay' + by = f(t), \text{ con } y(0) = 0 \;\&\; y'(0) = 0.$$

▼ Tenemos:

$$\mathcal{L}\{ y'(t)\} = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

y también:

$$\mathcal{L}\{ y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s).$$

De esta manera, al aplicar TL en ambos lados de la ED resulta:

$$\mathcal{L}\{ y'' + ay' + by\} = \mathcal{L}\{ f(t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{ y''\} + a\mathcal{L}\{ y'\} + b\mathcal{L}\{ y\} = \mathcal{L}\{ f(t)\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s^2Y(s) + asY(s) + bY(s) = F(s) \Rightarrow (s^2 + as + b)Y(s) = F(s).$$

de donde:

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s^2 + as + b}.$$

Como se puede apreciar, mediante la aplicación de la TL y algo de álgebra, tenemos casi resuelto el PVI. Salvo por un paso: hay que aplicar la transformación inversa para obtener así la solución

$$y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s^2 + as + b}\right\}.$$

En casos particulares las constantes $a, b$ serán conocidas; la función $f(t)$ estará dada (y aún puede ser 0), lo mismo que las condiciones iniciales, que no siempre ambas serán cero.

□

**Ejemplo 6.4.4** *Resolver el PVI* $y'' + 2y' + 4y = 0$, *con* $y(0) = 1$ & $y'(0) = -2$.

▼ Aplicando (6.1) y (6.2) resulta:

$$\mathfrak{L}\{y'\} = s\mathfrak{L}\{y(t)\} - y(0) = sY(s) - 1 \quad \& \quad \mathfrak{L}\{y''(t)\} = s^2Y - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s + 2;$$

de donde:

$$\left.\begin{array}{r} y'' + 2y' + 4y = 0 \\ y(0) = 1 \;\&\; y'(0) = -2 \end{array}\right\} \overset{\mathfrak{L}}{- - - >} (s^2Y - s + 2) + 2(sY - 1) + 4Y = 0 \;\Rightarrow\; (s^2 + 2s + 4)Y - s = 0.$$

Observe que la TL transforma un PVI en una ecuación algebraica, donde $Y$ es una función de $s$, aún desconocida. Despejamos $Y$ de la ecuación previa:

$$(s^2 + 2s + 4)Y = s \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{s}{s^2 + 2s + 4} = \frac{s}{(s + 1)^2 + 3}.$$

Para la última igualdad hemos usado $s^2 + 2s + 4 = s^2 + 2s + 1 + 3 = (s + 1)^2 + 3$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s + 1)^2 + 3}\right\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{(s + 1) - 1}{(s + 1)^2 + 3}\right\} = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 3}\right\} - \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s + 1)^2 + 3}\right\} = \\ &= e^{-t}\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 3}\right\} - e^{-t}\frac{1}{\sqrt{3}}\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{\sqrt{3}}{s^2 + (\sqrt{3})^2}\right\} = \\ &= e^{-t}\cos\sqrt{3}t - \frac{1}{\sqrt{3}}e^{-t}\operatorname{sen}\sqrt{3}t. \end{aligned}$$

□

**Ejemplo 6.4.5** *Resolver el PVI* $y'' + 9y = 0$, *con* $y(0) = -2$ & $y'(0) = 3$.

▼ Tenemos ahora:

$$\mathfrak{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y + 2s - 3;$$

y la ED después de aplicar la TL queda:

$$\begin{aligned} &s^2Y + 2s - 3 + 9Y = 0 \;\Rightarrow\; (s^2 + 9)Y = -2s + 3 \;\Rightarrow\; Y(s) = \frac{-2s + 3}{s^2 + 9} \;\Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow y(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{-2s + 3}{s^2 + 9}\right\} = -2\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + 9}\right\} + \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2 + 9}\right\} = -2\cos 3t + \operatorname{sen} 3t. \end{aligned}$$

□

Como se puede apreciar en los ejemplos anteriores, la TL nos ofrece otro método para encontrar la solución a ED lineales, siempre y cuando sea factible el cálculo de la transformada inversa de la función $Y(s)$ obtenida. Para este último paso se requieren conocer las propiedades de la TL y de la transformada inversa para completar el proceso.

**Ejercicios 6.4.4** *Transformada de una derivada.* *Soluciones en la página 5*
*Resolver los siguientes PVI:*

1. $\dfrac{dx}{dt} + x = 0,$ con $x(0) = 1.$
2. $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 4y = 0,$ con $y(0) = 2$ & $y'(0) = -1.$
3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} + 3\dfrac{dx}{dt} + 2x = 0,$ con $x(0) = 1$ & $x'(0) = -2.$
4. $\dfrac{d^2z}{dt^2} + 2\dfrac{dz}{dt} + 5z = 0,$ con $z(0) = -4$ & $z'(0) = 3.$
5. $\dfrac{d^3x}{dt^3} + x = 0,$ con $x(0) = 1, x'(0) = 3$ & $x''(0) = 8.$
6. $\dfrac{d^3y}{dt^3} - \dfrac{d^2y}{dt^2} = 0,$ con $y(0) = 2,\ y'(0) = 0$ & $y''(0) = 1.$

**Ejercicios 6.4.4** *Transformada de una derivada.* *Página 4*

1. $x(t) = e^{-t}$.
2. $y(t) = 2\cos 2t - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$.
3. $x(t) = e^{-2t}$.
4. $z(t) = -4e^{-t}\cos 2t - \dfrac{1}{2}e^{-t}\operatorname{sen} 2t$.
5. $x(t) = 2e^{-t} - e^{\frac{1}{2}t}\left[\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \dfrac{11}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$.
6. $y(t) = 1 - t + e^{t}$.