CAPÍTULO

6

La Transformada de Laplace

6.4.6 Transformada de una integral

- Esta propiedad establece que,

$$\text{si } f(t) \longleftrightarrow F(s), \text{ entonces } \int_0^t f(u)\,du \longleftrightarrow \frac{F(s)}{s}.$$

▼ Si definimos $g(t) = \int_0^t f(u)\,du$, entonces, por el teorema Fundamental del Cálculo:

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t f(u)\,du = f(t) \quad \& \quad g(0) = \int_0^0 f(u)\,du = 0.$$

Por lo tanto:

$$F(s) = \mathfrak{L}\{\, f(t)\} = \mathfrak{L}\{\, g'(t)\} = sG(s) - g(0).$$

De donde $F(s) = sG(s)$, y de aquí:

$$G(s) = \mathfrak{L}\{\, g(t)\} = \mathfrak{L}\left\{ \int_0^t f(u)\,du \right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

□

Ejemplo 6.4.1 *Calcular* $\mathfrak{L}^{-1}\left\{ \dfrac{1}{s^3 + 4s} \right\}$.

▼ Observamos que:

$$\frac{1}{s^3+4s} = \frac{1}{s(s^2+4)} = \frac{\left(\dfrac{1}{s^2+4}\right)}{s} = \frac{F(s)}{s}.$$

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

Por lo tanto,

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+4s}\right\} = \int_0^t f(u)\,du,$$

donde:

$$F(s) = \frac{1}{s^2+4} \quad \& \quad f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2}\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\} = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t.$$

De esta manera:

$$\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3+4s}\right\} = \int_0^t \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2u\,du = -\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\cos 2u\,\Big|_0^t = \frac{1}{4}(1-\cos 2t).$$

□

Ejemplo 6.4.2 *Resolver la ecuación integro-diferencial* $f(t) + \int_0^t f(u)\,du = 1.$

▼ Aplicamos TL en ambos miembros:

$$\mathfrak{L}\left\{f(t) + \int_0^t f(u)\,du\right\} = \mathfrak{L}\{1\} \Rightarrow \mathfrak{L}\{f(t)\} + \mathfrak{L}\left\{\int_0^t f(u)\,du\right\} = \mathfrak{L}\{1\} \Rightarrow F(s) + \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s},$$

donde $f(t) \longleftrightarrow F(s)$. De aquí:

$$sF(s) + F(s) = 1 \Rightarrow F(s)(s+1) = 1 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s+1}.$$

Al calcular la transformada inversa, obtenemos el resultado deseado:

$$f(t) = \mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}.$$

□

Ejercicios 6.4.6 *Transformada de una integral.* *Soluciones en la página 3*
En cada uno de los ejercicios, calcular $\mathfrak{L}\{f(t)\}$ *o bien* $\mathfrak{L}^{-1}\{F(s)\}$.

1. $f(t) = e^{-3t}\int_0^t \tau \operatorname{sen} 2\tau\,d\tau.$
2. $f(t) = e^{-3t}\int_0^t \frac{\operatorname{sen} 2\tau}{\tau}\,d\tau.$
3. $F(s) = \frac{1-e^{-2s}}{s^2}.$
4. $F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$

Ejercicios 6.4.6 *Transformada de una integral.* *Página 2*

1. $\mathfrak{L}\left\{e^{-3t}\int_0^t \tau \operatorname{sen} 2\tau \, d\tau\right\} = \dfrac{4}{[s^2+6s+13]^2}$.

2. $\mathfrak{L}\left\{e^{-3t}\int_0^t \dfrac{\operatorname{sen} 2\tau}{\tau} d\tau\right\} = \dfrac{1}{s+3}\arctan\left(\dfrac{s+3}{2}\right)$.

3. $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\dfrac{1-e^{-2s}}{s^2}\right\} = t\,u(t) - (t-2)u(t-2)$.

4. $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right\} = \dfrac{\operatorname{sen} t - t\cos t}{2}$.