CAPÍTULO

# 6

# La transformada de Laplace

### 6.4.2 Primera propiedad de traslación

Para cualquier $a \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}[e^{at} f(t)]\,dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\,dt = F(s-a);$$

es decir,

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s-a). \tag{6.1}$$

Entonces, la TL de $e^{at} f(t)$ es la misma que la de $f(t)$, con un corrimiento hacia $a$. Por ejemplo:

$$\mathcal{L}\{e^{3t}t^2\} = \frac{2}{s^3}\bigg|_{s\to s-3} = \frac{2}{(s-3)^3}.$$

El símbolo $\big|_{s\to s-a}$ se usa sólo para indicar que hay que reemplazar la variable $s$ en todas sus ocurrencias por $s-a$. Con este resultado obtenemos las siguientes fórmulas:

$$\mathcal{L}\{e^{at}t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}\bigg|_{s\to s-a} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}.$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\cos bt\} = \frac{s}{s^2+b^2}\bigg|_{s\to s-a} = \frac{s-a}{(s-a)^2+b^2}.$$

$$\mathcal{L}\{e^{at}\operatorname{sen} bt\} = \frac{b}{s^2+b^2}\bigg|_{s\to s-a} = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}.$$

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

**Ejemplo 6.4.1** *Obtener* $\mathcal{L}\{e^{-3t}\cos t\}$ & $\mathcal{L}\{e^{-3t}\operatorname{sen} t\}$.

▼

$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\cos t\} = \left.\frac{s}{s^2+1}\right|_{s\to s+3} = \frac{s+3}{(s+3)^2+1}.$$
$$\mathcal{L}\{e^{-3t}\operatorname{sen} t\} = \left.\frac{1}{s^2+1}\right|_{s\to s+3} = \frac{1}{(s+3)^2+1}.$$

□

**Ejemplo 6.4.2** *Calcular* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^2+s-2}\right\}$.

▼ Primero completamos cuadrados en el denominador:

$$\frac{1}{s^2+s-2} = \frac{1}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}}.$$

Luego consideramos solamente $\dfrac{1}{s^2-\frac{9}{4}}$. De acuerdo con la tabla, la fórmula (10) nos da:

$$\frac{2}{3}\operatorname{senh}\frac{3}{2}t \longleftrightarrow \frac{2}{3}\left[\frac{\frac{3}{2}}{s^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}\right] = \frac{1}{s^2-\frac{9}{4}}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{ccc}
\frac{2}{3}\operatorname{senh}\frac{3}{2}t & \longleftrightarrow & \frac{2}{3}\left[\dfrac{\frac{3}{2}}{s^2-\frac{9}{4}}\right] \\
\Big\downarrow e^{-\frac{t}{2}} & & \Big\downarrow s\to s+\frac{1}{2} \\
\frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{senh}\frac{3}{2}t & \longleftrightarrow & \frac{2}{3}\left[\dfrac{\frac{3}{2}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}}\right] = \dfrac{1}{s^2+s-2}
\end{array}$$

Así concluimos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-2}\right\} = \frac{2}{3}e^{-\frac{t}{2}}\operatorname{senh}\frac{3t}{2}.$$

□

**Ejemplo 6.4.3** *Hallar* $\mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^2+6s+10}\right\}$.

▼ Completamos cuadrados en el denominador: $\dfrac{s}{s^2+6s+10} = \dfrac{s}{(s+3)^2+1}$. Sabemos que:

$$\cos t \longleftrightarrow \frac{s}{s^2+1}.$$

Por lo tanto:

$$\begin{array}{ccc}
\cos t & \longleftrightarrow & \dfrac{s}{s^2+1} \\
\Big\downarrow e^{-3t} & & \Big\downarrow s\to s+3 \\
e^{-3t}\cos t & \longleftrightarrow & \dfrac{s+3}{(s+3)^2+1}
\end{array}$$

Nos ha resultado $\dfrac{s+3}{(s+3)^2+1}$ y no $\dfrac{s}{(s+3)^2+1}$. Arreglamos esta diferencia de la siguiente manera:

$$\frac{s}{(s+3)^2+1} = \frac{(s+3)-3}{(s+3)^2+1} = \frac{s+3}{(s+3)^2+1} - \frac{3}{(s+3)^2+1}.$$

Incorporamos esta idea para hallar:

$$\begin{tikzcd}
\cos t - 3\,\mathrm{sen}\, t \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "e^{-3t}"] & \dfrac{s}{s^2+1} - \dfrac{3}{s^2+1} \arrow[d, "s \to s+3"] \\
(\cos t - 3\,\mathrm{sen}\, t)e^{-3t} \arrow[r, leftrightarrow] & \dfrac{s+3}{(s+3)^2+1} - \dfrac{3}{(s+3)^2+1} = \dfrac{s}{(s+3)^2+1}
\end{tikzcd}$$

En consecuencia:

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+3)^2+1}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+6s+10}\right\} = e^{-3t}(\cos t - 3\,\mathrm{sen}\, t).$$

□

**Ejercicios 6.4.2** *Primera propiedad de traslación.* *Soluciones en la página 4*
*En cada uno de los ejercicios, calcular $\mathcal{L}\{f(t)\}$ o bien $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$, según se requiera:*

1. $f(t) = 3\,\mathrm{sen}\, 4t - 2\cos 5t$.
2. $f(t) = t^3 - 4t^2 + 5$.
3. $f(t) = e^{-4t}(t^2+1)^2$.
4. $f(t) = \mathrm{sen}\, \alpha t \cos \beta t$.
5. $f(t) = \mathrm{sen}^2\, at$.
6. $F(s) = \dfrac{5}{s^2+4} + \dfrac{20s}{s^2+9}$.
7. $F(s) = \dfrac{2}{(s+2)^4} + \dfrac{3}{s^2+16} + \dfrac{5(s+1)}{s^2+2s+5}$.
8. $F(s) = \dfrac{7}{s^2+10s+41}$.
9. $F(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+5}$.
10. $F(s) = \dfrac{s+3}{s^2+2s+10}$.
11. $F(s) = \dfrac{3s+1}{s^2-4s+20}$.

**Ejercicios 6.4.2** *Primera propiedad de traslación.* *Página 3*

1. $F(s) = \dfrac{-2s^3 + 12s^2 - 32s + 300}{(s^2+16)(s^2+25)}$.
2. $F(s) = \dfrac{6 - 8s + 5s^3}{s^4}$.
3. $F(s) = \dfrac{24 + 4(s+4)^2 + (s+4)^4}{(s+4)^5}$.
4. $F(s) = \dfrac{\alpha s^2 + \alpha(\alpha^2 - \beta^2)}{[s^2 + (\alpha+\beta)^2][s^2 + (\alpha-\beta)^2]}$.
5. $F(s) = \dfrac{2a^2}{s[s^2 + 4a^2]}$.
6. $f(t) = \dfrac{5}{2}\operatorname{sen} 2t + 20\cos 3t$.
7. $f(t) = \dfrac{1}{3}e^{-2t}t^3 + \dfrac{3}{4}\operatorname{sen} 2t + 5e^{-t}\cos 2t$.
8. $f(t) = \dfrac{7}{4}e^{-5t}\operatorname{sen} 4t$.
9. $f(t) = e^{-t}\cos 2t$.
10. $f(t) = e^{-t}\cos 3t + \dfrac{2}{3}e^{-t}\operatorname{sen} 3t$.
11. $f(t) = e^{2t}\left(3\cos 4t + \dfrac{7}{4}\operatorname{sen} 4t\right)$.