CAPÍTULO

7

Métodos numéricos

7.2 Método de Euler

En general, la solución de un PVI, $y' = f(x, y)$, con $y(x_0) = y_0$, es una función $y(x)$ que se puede desarrollar mediante un polinomio de Taylor de cualquier orden en $x = x_0$.
La aproximación más simple, conocida como aproximación lineal, se obtiene al desarrollar la solución $y(x)$ mediante un polinomio de Taylor de orden uno; en este caso tenemos:

$$y(x) \approx y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = y(x_0) + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

Podemos observar que la solución se aproxima por medio de una línea recta que coincide con la ecuación de la recta tangente a la curva solución en $x = x_0$. Esta aproximación produce buenos resultados sólo para puntos cercanos al punto $x = x_0$. Por ejemplo, si deseamos conocer el valor de $y(x)$ cuando la variable independiente toma el valor $x = x_0 + h$, un punto cercano a x_0, tenemos:

$$y(x_0 + h) \approx y(x_0) + y'(x_0)h = y(x_0) + f(x_0, y_0)h,$$

donde $h = x - x_0$ es el cambio de x_0 a x. Escribiremos $\tilde{y}_1$ para representar a la cantidad de la derecha en la expresión anterior, es decir:

$$\tilde{y}_1(x_0 + h) = y(x_0) + y'(x_0)h = y(x_0) + f(x_0, y_0)h.$$

Como en general $y(x_0 + h) \neq \tilde{y}_1(x_0 + h)$, tendremos un error en la aproximación. Hay varias formas de medir el error, pero aquí nos interesa destacar el error absoluto, el relativo y el porcentual.

- El error absoluto EA es la diferencia positiva entre el valor exacto $y(x_0 + h)$ y el aproximado $\tilde{y}_1(x_0 + h)$, es decir:

$$\mathrm{EA} = |\, y(x_0 + h) - \tilde{y}_1(x_0 + h)\,|.$$

1. canek.azc.uam.mx: 24/ 9/ 2010

- El error relativo ER se obtiene tomando la razón que hay entre el error absoluto y el valor absoluto del valor exacto $y(x_0 + h)$ de la función

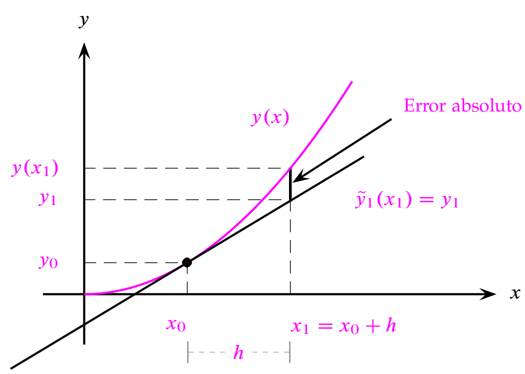
$$\text{ER} = \left| \frac{y(x_0 + h) - \tilde{y}_1(x_0 + h)}{y(x_0 + h)} \right|.$$

- El error porcentual EP de la aproximación está dado por

$$\text{EP} = 100 \cdot \text{ER}\% = 100 \left| \frac{y(x_0 + h) - \tilde{y}_1(x_0 + h)}{y(x_0 + h)} \right| \%.$$

  Todos estos errores pueden reducirse significativamente haciendo que el valor de h sea cada vez más pequeño, con lo cual se mejora la aproximación.

En la siguiente figura se ilustra gráficamente la curva solución $y(x)$ y la aproximación en $x_1 = x_0 + h$, así como el error absoluto cometido.



Ejemplo 7.2.1 *Encuentre una aproximación de la solución en $x = 0.1$ del PVI $\quad y' = 2y, \ $ con $\ y(0) = 1$.*

▼ De la condición inicial tenemos:

$$y(0) = 1 \ \Rightarrow \ y'(0) = 2y(0) = 2.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en el punto $x = 0.1$, consideremos la aproximación lineal de la solución alrededor de $x = 0$:

$$\tilde{y}_1(h) = y(0) + y'(0)h = 1 + 2h.$$

Como $h = 0.1$, tenemos que la solución aproximada es:

$$\tilde{y}_1(0.1) = 1 + 2(0.1) = 1.2\,.$$

Por otra parte la solución analítica de este PVI es $y(x) = e^{2x}$. Si evaluamos esta expresión en $x = 0.1$, tendremos el valor exacto

$$y_{\text{exacto}} = e^{0.2} \approx 1.2214\,.$$

Observemos que la aproximación lineal proporciona una cifra decimal exacta teniendo un error porcentual en la aproximación de

$$\text{EP} = 100 \left| \frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_1}{y_{\text{exacto}}} \right| \% = 100 \left| \frac{1.2214 - 1.2}{1.2214} \right| \% = 1.75209\%.$$

□

Ejemplo 7.2.2 *Encuentre una solución aproximada en $x = 1.2$ del PVI:*

$$y' = x - y, \text{ con } y(1) = 2.$$

▼ De la condición inicial tenemos:

$$y(1) = 2 \Rightarrow y'(1) = 1 - y(1) = 1 - 2 = -1.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en el punto $x = 1.2$, consideremos la aproximación lineal de la solución alrededor de $x = 1$:

$$\tilde{y}_1(1 + h) = y(1) + y'(1)h = 2 - h.$$

Como $h = x - x_0 = 1.2 - 1 = 0.2$, tenemos que la solución aproximada es:

$$\tilde{y}_1(1.2) = 2 - 0.2 = 1.8\,.$$

Por otra parte, la ecuación diferencial es $y' + y = x$, con factor integrante $\mu = e^x$. La solución analítica del PVI es

$$y = x - 1 + 2e^{1-x}.$$

Evaluando esta expresión en $x = 1.2$, obtenemos el valor exacto:

$$y_{\text{exacto}} = 1.2 - 1 + 2e^{1-1.2} = 0.2 + 2e^{-0.2} \approx 1.83746.$$

Observemos que la aproximación lineal proporciona una cifra decimal de la solución exacta y el error porcentual en la aproximación es

$$\text{EP} = 100 \left| \frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_1}{y_{\text{exacto}}} \right| \% = 100 \left| \frac{1.83746 - 1.8}{1.83746} \right| \% = 2.03868\%.$$

□

Ejemplo 7.2.3 *Encuentre una aproximación de la solución en $x = 2.01$ del PVI:*

$$y' = xy, \quad \text{con } y(2) = 4.$$

▼ En este caso tenemos:

$$y(2) = 4 \Rightarrow y'(2) = 2\,y(2) = 2(4) = 8.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en el punto $x = 2.01$, consideremos primero la aproximación lineal de la solución alrededor de $x = 2$:

$$\tilde{y}_1(2 + h) = y(2) + y'(2)h = 4 + 8h.$$

Como $h = x - x_0 = 2.01 - 2 = 0.01$ tenemos que la solución aproximada es

$$\tilde{y}_1(2.01) = 4 + 8(0.01) = 4.08\,.$$

Por otra parte, la ecuación diferencial es separable, de forma que separando variables e integrando resulta la solución general:

$$y = C\, e^{\frac{x^2}{2}};$$

y usando la condición inicial $y(2) = 4$, tenemos $C = 4e^{-2}$ por lo que la solución del PVI es

$$y = 4e^{-2+\frac{x^2}{2}}.$$

Si evaluamos esta expresión en $x = 2.01$, obtenemos el valor exacto:

$$y_{\text{exacto}} = 4e^{-2+\frac{(2.01)^2}{2}} \approx 4.0810\,.$$

La aproximación lineal proporciona dos cifras decimales de la solución exacta con un error porcentual de

$$\text{EP} = 100 \left| \frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_1}{y_{\text{exacto}}} \right| \% = 100 \left| \frac{4.08101 - 4.08}{4.08101} \right| \% = 0.0247\%.$$

□

Ejemplo 7.2.4 *Encuentre una aproximación de la solución en $x = 0.9$ del PVI:*

$$y' = \frac{x-y}{x+y}, \quad \text{con} \quad y(1) = 4.$$

▼ De la condición inicial tenemos:

$$y(1) = 4 \Rightarrow y'(1) = \frac{1-4}{1+4} = \frac{-3}{5} = -0.6\,.$$

Para determinar un valor aproximado de la solución en el punto $x = 0.9$, consideremos la aproximación lineal de la solución alrededor de $x = 1$

$$\tilde{y}_1(1+h) = y(1) + y'(1)h = 4 - 0.6h.$$

En este caso tenemos $h = x - x_0 = -0.1$, por lo cual la solución aproximada es

$$\tilde{y}_1(0.9) = 4 - 0.6(-0.1) = 4.06\,.$$

Por otra parte, la ecuación diferencial es homogénea; proponemos entonces el cambio:

$$y = xu, \qquad y' = u + xu'.$$

La ecuación diferencial se transforma en

$$u + xu' = \frac{x - xu}{x + xu} \Rightarrow u + xu' = \frac{1-u}{1+u}.$$

Simplificando tenemos:

$$xu' = \frac{1-u}{1+u} - u = \frac{1 - u - u(1+u)}{1+u} = \frac{1 - 2u - u^2}{1+u} \Rightarrow \frac{1+u}{1-2u-u^2}du = \frac{dx}{x}.$$

Finalmente, integrando obtenemos:

$$-\frac{1}{2}\ln(1 - 2u - u^2) = \ln x + C \Rightarrow \ln(1 - 2u - u^2) + 2\ln x = C.$$

Que podemos reescribir como:

$$\ln\left[(1 - 2u - u^2)x^2\right] = C \Rightarrow (1 - 2u - u^2)x^2 = C.$$

Si ahora usamos $y = ux$ tenemos:

$$x^2 - 2ux^2 - u^2x^2 = C \Rightarrow x^2 - 2yx - y^2 = C.$$

Considerando la condición inicial $y(1) = 4$, resulta:

$$C = 1 - 2(4) - 16 = -23 \Rightarrow x^2 - 2yx - y^2 = -23 \Rightarrow y^2 + 2xy - x^2 - 23 = 0.$$

Completando cuadrados, tenemos:

$$y^2 + 2xy + x^2 = 2x^2 + 23 \Rightarrow (y+x)^2 = 2x^2 + 23 \Rightarrow y + x = \pm\sqrt{2x^2 + 23}.$$

Sólo consideramos el signo positivo, porque la curva solución tiene que pasar por el punto $(1, 4)$, tenemos entonces:

$$y(x) = -x + \sqrt{2x^2 + 23}.$$

Si evaluamos esta expresión en $x = 0.9$, tendremos el valor exacto:

$$y_{\text{exacto}} = -0.9 + \sqrt{2(0.9)^2 + 23} \approx 4.06185.$$

En este ejemplo, la aproximación lineal nos proporciona dos cifras decimales exactas de la solución, con un error porcentual de

$$\text{EP} = 100\left|\frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_1}{y_{\text{exacto}}}\right|\% = 100\left|\frac{4.06185 - 4.06}{4.06185}\right|\% = 0.04555\%.$$

□

En los siguientes ejemplos se muestra como aproximar la solución en dos pasos.

Ejemplo 7.2.5 *Considere el PVI* $y' = x - y, \quad con \quad y(1) = 2$. *Encuentre una aproximación de la solución en* $x = 1.1$. *Posteriormente use esta aproximación para determinar la solución en* $x = 1.2$.

▼ La aproximación lineal de la solución alrededor de $x = 1$ es

$$\tilde{y}_1(1 + h) = y(1) + y'(1)h = y(1) + [1 - y(1)]h = 2 + (1 - 2)h = 2 - h.$$

Considerando $h = 0.1$, obtenemos:

$$\tilde{y}_1(1.1) = 2 - 0.1 = 1.9\,.$$

Ahora consideremos la aproximación lineal en $x = 1.1$; tenemos:

$$\tilde{y}_1(1.1 + h) = y(1.1) + y'(1.1)h = y(1.1) + [1.1 - y(1.1)]h = 1.9 - 0.8h.$$

Evaluando en $h = 0.1$, obtenemos la aproximación pedida:

$$\tilde{y}_1(1.2) = 1.9 - 0.8(0.1) = 1.82\,.$$

Evaluando la solución exacta $y = x - 1 + 2e^{1-x}$ (ver ejemplo 7.2.2), en $x = 1.2$ tenemos:

$$y_{\text{exacto}} = 1.2 - 1 + 2e^{1-1.2} = 0.2 + 2e^{-0.2} \approx 1.8375\,.$$

En este caso el error porcentual cometido en la aproximación es

$$\text{EP} = 100\left|\frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_1}{y_{\text{exacto}}}\right|\% = 100\left|\frac{1.8375 - 1.82}{1.8375}\right|\% = 0.9524\%.$$

En efecto, es menor que el cometido al calcular $\tilde{y}_1(1.2)$ directamente con sólo una aproximación, como puede verse en el ejemplo 7.2.2, en el cual $\text{EP} = 2.03868\%$.

□

Ejemplo 7.2.6 *Considere el PVI* $y' = xy, \quad con \quad y(2) = 4$. *Encuentre una aproximación en* $x = 2.005$ *de la solución; posteriormente úsela para determinar la solución en* $x = 2.01$.

▼ De la condición inicial $y(2) = 4$, tenemos que $y'(2) = 2\,y(2) = 2(4) = 8$. Si ahora queremos determinar un valor aproximado de la solución en el punto $x = 2.01$, consideremos la aproximación lineal de la solución alrededor de $x = 2$, que está dada por

$$\tilde{y}_1(2 + h) = y(2) + y'(2)h = 4 + 8h.$$

Usando $h = 0.005$, tenemos que

$$\tilde{y}_1(2.005) = 4 + 8(0.005) = 4.04\,.$$

Por otra parte, la aproximación lineal de la solución alrededor de $x = 2.005$ es

$$\tilde{y}_1(2.005 + h) = y(2.005) + y'(2.005)h = y(2.005) + 2.005\,y(2.005)h.$$

Utilizando el resultado previo tenemos:

$$\tilde{y}_1(2.005 + h) = 4.04 + 2.005(4.04)h = 4.04 + 8.1002h.$$

Evaluando esta expresión en $h = 0.005$, obtenemos la aproximación pedida:

$$\tilde{y}_1(2.01) = 4.04 + 8.1002(0.005) = 4.0805\,.$$

Comparemos ahora esta aproximación con la solución exacta $y = 4e^{-2+\frac{1}{2}x^2}$ (ver ejemplo 7.2.3), evaluada en el punto $x = 2.01$, es decir, si consideramos que

$$y_{\text{exacto}} = 4e^{-2+\frac{(2.01)^2}{2}} \approx 4.08101,$$

podemos notar que el error porcentual de la aproximación es

$$\text{EP} = 100\left|\frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_1}{y_{\text{exacto}}}\right|\% = 100\left|\frac{4.08101 - 4.0805}{4.08101}\right|\% = 0.0125\%.$$

Compare el resultado con el obtenido en el ejemplo 7.2.3, en el cual $\text{EP} = 0.0247\%$.

□

Ejemplo 7.2.7 *Encuentre una aproximación de la solución en $x = 0.9$ del PVI:*

$$y' = \frac{x-y}{x+y}, \quad \text{con} \quad y(1) = 4.$$

Primero determine una aproximación de la solución en $x = 0.95$ y, posteriormente, use su resultado para obtener la aproximación pedida.

▼ Procedamos como en los casos anteriores, primero consideremos la aproximación lineal de la solución alrededor de $x = 1$:

$$\tilde{y}_1(1+h) = y(1) + y'(1)h = y(1) + \frac{1 - y(1)}{1 + y(1)}h = 4 + \frac{-3}{5}h = 4 - 0.6h.$$

Si usamos $h = -0.05$, tenemos:

$$\tilde{y}_1(0.95) = 4 - 0.6(-0.05) = 4.03\,.$$

Considerando ahora la aproximación lineal de la solución alrededor de $x = 0.95$:

$$\tilde{y}_1(0.95+h) = y(0.95) + y'(0.95)h = y(0.95) + \frac{0.95 - y(0.95)}{0.95 + y(0.95)}h.$$

Si usamos el resultado previo $y(0.95) = 4.03$:

$$\tilde{y}_1(0.95+h) = 4.03 + \frac{0.95 - 4.03}{0.95 + 4.03}h = 4.03 - 0.6185h.$$

Evaluando esta expresión cuando $h = -0.05$, obtenemos finalmente:

$$\tilde{y}_1(0.9) = 4.03 - 0.6185(-0.05) = 4.0609\,.$$

Comparamos ahora el error cometido con respecto a la solución de la ED (ver ejemplo 7.2.4):

$$y = -x + \sqrt{2x^2 + 23}.$$

que produce al evaluar en $x = 0.09$

$$y_{\text{exacto}} = -0.9 + \sqrt{2(0.9)^2 + 23} \approx 4.0619\,.$$

De donde el error porcentual está dado por

$$\text{EP} = 100\left|\frac{y_{\text{exacto}} - \tilde{y}_1}{y_{\text{exacto}}}\right|\% = 100\left|\frac{4.0619 - 4.0609}{4.0619}\right|\% = 0.0246\%.$$

Compare con lo que se calculó en el ejemplo 7.2.4, donde EP $= 0.0455\%$.

□

En los últimos cuatro ejemplos hemos ilustrado una técnica para aproximar la solución en dos puntos cercanos a x_0. Siguiendo este procedimiento, es posible establecer un algoritmo que nos permita calcular la solución en tantos puntos como queramos de un intervalo dado. En efecto, suponga que se desea aproximar la solución de $y' = f(x, y)$, con $y(x_0) = y_0$ en los puntos con abscisas

$$x_1 = x_0 + h, \quad x_2 = x_0 + 2h, \quad x_3 = x_0 + 3h, \ \ldots$$

Consideremos primero la aproximación lineal de la curva solución alrededor de x_0

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) = y(x_0) + f(x_0, y_0)(x - x_0).$$

En esta expresión hemos sustituido la derivada $y'(x_0)$ por el valor de la función $f(x, y)$ evaluada en el punto inicial (x_0, y_0). Una aproximación de $y(x_1)$ sobre la curva solución se obtiene usando $x_1 = x_0 + h$ en la ecuación previa; obtenemos de esta forma el valor :

$$y(x_1) = y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0); \quad \text{donde } h = x_1 - x_0. \tag{7.1}$$

Consideremos nuevamente, para obtener una aproximación de la solución en $x_2 = x_0 + 2h$, la aproximación lineal de la solución que pasa por $(x_1, y(x_1))$, es decir:

$$y(x) = y(x_1) + y'(x_1)(x - x_1) = y(x_1) + f[x_1, y(x_1)](x - x_1).$$

Para continuar el proceso necesitamos hacer otra aproximación. En efecto, como se desconoce el valor de $y(x_1)$ lo aproximamos por el valor y_1 obtenido antes. De aquí resulta:

$$y(x) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1).$$

De esta forma al utilizar x_2 en la ecuación anterior obtenemos:

$$y(x_2) = y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1); \quad \text{donde } h = x_2 - x_1. \tag{7.2}$$

El proceso se puede seguir indefinidamente obteniendo en cada paso un nuevo punto que aproxima la solución. A este proceso se le conoce como método de Euler.

Método de Euler

- La solución numérica del PVI $y' = f(x, y)$, con $y(x_0) = y_0$ y también con tamaño de paso h, está formada por los puntos(x_{i+1}, y_{i+1}) que se obtienen mediante las fórmulas de recurrencia:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h; \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i); \end{aligned} \tag{7.3}$$

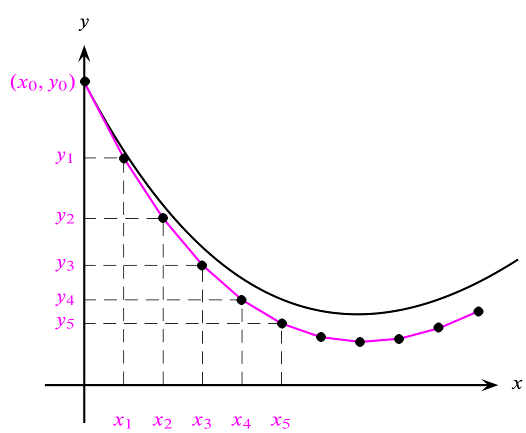
  con $i = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y además los segmentos rectilíneos entre cada par de puntos consecutivos.

En muchas ocasiones conviene definir el cambio en alturas $y_{i+1} - y_i$ por k_i; de esta forma hallamos:

$$k_i = y_{i+1} - y_i = h\, f(x_i, y_i);$$

de suerte que la ecuación (7.3) se puede escribir como:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h; \\ y_{i+1} &= y_i + k_i. \end{aligned}$$



En la figura anterior se muestra el proceso seguido para determinar la solución aproximada; observe que en cada paso se obtiene un error mayor debido a que se acumulan los errores cometidos en los pasos previos; a este error se le conoce como error de propagación. Sin embargo, es plausible pensar que los errores de aproximación y de propagación se reducen al considerar tamaños de paso pequeños. En efecto, si se considera la serie de Taylor de la solución $y(x)$ en x_i, tenemos:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + y'(x_i)(x_{i+1}-x_i) + \frac{1}{2!}y''(x_i)(x_{i+1}-x_i)^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_i)(x_{i+1}-x_i)^3 + \ldots = \\ &= y_i + y'(x_i)\,h + \frac{1}{2!}y''(x_i)\,h^2 + \frac{1}{3!}y'''(x_i)\,h^3 + \ldots \end{aligned}$$

Claramente, los dos primeros términos corresponden a la aproximación de Euler y el error cometido está dado, justamente, por los términos restantes. Mas aún, el error es proporcional al cuadrado del tamaño de paso h; en consecuencia, si disminuimos el error por un factor de dos, entonces el error se reduce en un factor de cuatro. Es decir, para mejorar los resultados que arroja el método de Euler, basta con reducir el tamaño de paso. Sin embargo, el error de propagación no disminuye generalmente de esta forma y siempre habrá que considerarlo en nuestra solución.

Ejemplo 7.2.8 *Considere el PVI $y' = x^2 - xy^2$, con $y(1) = 2$. Use el método de Euler para calcular $y(1.2)$; utilice $h = 0.1$.*

▼ En este caso debemos repetir el proceso de Euler dos veces con $h = 0.1$. Obtenemos y_1 considerando que $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $f(x, y) = x^2 - xy^2$ y utilizando la ecuación de la recta tangente en $x = x_0$, es decir:

$$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0) = 2 + 0.1\, f(1, 2) = 2 + 0.1(-3) = 1.7\,.$$

Repetimos el proceso aplicando ahora la ecuación (7.2):

$$y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1) = 1.7 + 0.1\, f(1.1, 1.7) = 1.7 + 0.1\left[(1.1)^2 - (1.1)(1.7)^2\right] = 1.5031\,.$$

Es decir, $y_2 = 1.5031$ es una aproximación de $y(1.2)$.

□

Ejemplo 7.2.9 *Encuentre una aproximación de $y(x)$ en $x = 1.5$, si $y(x)$ es la solución del PVI $y' = x - 2y + y^2$, con $y(1) = 1$; utilice para ello el método de Euler con $h = 0.1$.*

▼ En este caso debemos repetir cinco veces el proceso de Euler ya que $h = 0.1$; obtendremos entonces valores aproximados de $y(x)$ correspondientes a

$$x = 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5\,;$$

consideremos $(x_0, y_0) = (1, 1)$ y $f(x, y) = x - 2y + y^2$; obtenemos entonces y_1, utilizando la ecuación de la recta tangente en $x = x_0$

$$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0) = 1 + 0.1f(1, 1) = 1 + 0.1(0) = 1.0\,;$$

repetimos el proceso considerando $(x_1, y_1) = (1.1, 1.0)$; obtenemos en este caso:

$$y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1) = 1.0 + 0.1\, f(1.1, 1.0) = 1.0 + 0.1(1.1 - 2 + 1) = 1.01\,;$$

repetimos nuevamente el proceso considerando $(x_2, y_2) = (1.2, 1.01)$; y ahora:

$$y_3 = y_2 + h\, f(x_2, y_2) = 1.01 + 0.1\, f(1.2, 1.01) = 1.01 + 0.1(1.2 - 2.02 + 1.0201) = 1.03001\,.$$

Repetimos el proceso otras dos veces más, así obtenemos:

$$\begin{aligned} y_4 &= y_3 + h\, f(x_3, y_3) = 1.0300 + 0.1 f(1.3, 1.0300) = \\ &= 1.0300 + 0.1[1.3 - 2(1.0300) + (1.0300)^2] = 1.0601. \\ y_5 &= y_4 + h\, f(x_4, y_4) = 1.0601 + 0.1\, f(1.4, 1.0601) = \\ &= 1.0601 + 0.1[1.4 - 2(1.0601) + (1.0601)^2] = 1.1005. \end{aligned}$$

En conclusión, una aproximación de la solución en $x = 1.5$ es $y_5 = 1.1005$.

□

Ejemplo 7.2.10 *Utilice el método de Euler, con tamaño de paso $h = 0.1$, para determinar una aproximación numérica de la solución del PVI $y' = x - y$ con $y(0) = 1$ en el intervalo $[0, 1]$. Repita considerando ahora tamaños de paso iguales a $h = 0.05$ y a $h = 0.01$. Analice el comportamiento del error porcentual.*

▼ Como el tamaño de paso es $h = 0.1$, debemos encontrar valores aproximados de la solución $y(x)$ en los puntos

$$x = 0.1, 0.2, 0.3, \ldots, 1.0\,;$$

aplicamos primero la ecuación (7.1) para calcular y_1; consideramos para ello que $(x_0, y_0) = (0, 1)$ y que $f(x, y) = x - y$; obtenemos entonces:

$$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 1 + 0.1(0 - 1) = 0.9\,;$$

determinamos ahora y_2 utilizando la ecuación (7.2), considerando $(x_1, y_1) = (0.1, 0.9)$; tenemos entonces:

$$y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0.9 + 0.1(0.1 - 0.9) = 0.82\,.$$

El valor y_3 lo calculamos utilizando $(x_2, y_2) = (0.2, 0.82)$ y la relación de recurrencia (7.3) para el caso $i = 2$; obtenemos en este caso:

$$y_3 = y_2 + h\, f(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.82 + 0.1(0.2 - 0.82) = 0.758\,.$$

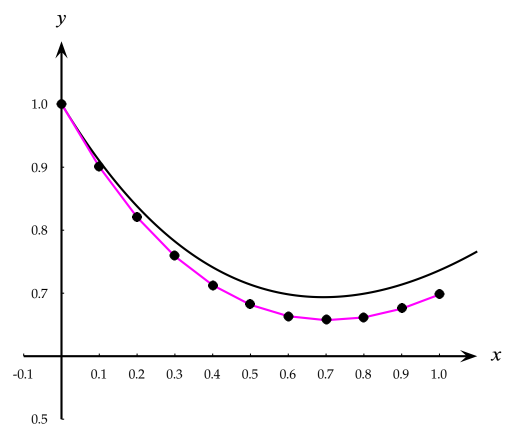
Seguimos con el proceso otras siete veces para calcular $y_4, y_5, \ldots y_{10}$. En la tabla siguiente se muestran los resultados obtenidos; en la primera columna se muestra el número de paso i; en las dos siguientes se muestran los resultados (x_i, y_i) calculados todos con cuatro cifras decimales significativas y redondeo al decimal más cercano. Por otra parte, calculamos los valores $y(x_i)$ con $i = 1, 2, \ldots, 10$, considerando que la solución analítica del PVI es

$$y(x) = x - 1 + 2e^{-x}.$$

Estos resultados se muestran en la cuarta columna. Finalmente, en la quinta columna se muestra el error porcentual EP. Observe que este error se incrementa al aumentar el número de pasos.

i	x_i	y_i	$y(x_i)$	EP (%)
0	0	1	1	0.00
1	0.1	0.9000	0.9097	1.07
2	0.2	0.8200	0.8375	2.09
3	0.3	0.7580	0.7816	3.02
4	0.4	0.7122	0.7406	3.83
5	0.5	0.6810	0.7131	4.50
6	0.6	0.6629	0.6976	4.97
7	0.7	0.6566	0.6932	5.28
8	0.8	0.6609	0.6987	5.41
9	0.9	0.6748	0.7131	5.37
10	1	0.6973	0.7358	5.23

En la figura siguiente se muestra un esquema de la solución aproximada; observe que la curva asociada a la solución analítica es suave, mientras que la solución aproximada está formada por un conjunto de puntos y los segmentos rectilíneos que los unen. El origen de coordenadas en la gráfica se ha colocado en $(0, 0.6)$.



Por otra parte, esperamos reducir el error haciendo más pequeño el tamaño de paso h. Para mostrarlo, repitamos el proceso considerando ahora $h = 0.05$. En el primer paso consideremos $(x_0, y_0) = (0, 1)$ y apliquemos la ecuación (7.1); tenemos entonces

$$y_1 = y_0 + h\, f(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 1 + 0.05(0 - 1) = 0.95\,.$$

Utilizando $(x_1, y_1) = (0.05, 0.95)$ y la ecuación (7.2), tenemos:

$$y_2 = y_1 + h\, f(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0.95 + 0.05(0.05 - 0.95) = 0.905\,.$$

Utilizando $(x_2, y_2) = (0.1, 0.905)$ y la relación de recurrencia (7.3), con $i = 2$, obtenemos:

$$y_3 = y_2 + h\, f(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.905 + 0.05(0.1 - 0.905) = 0.8648\,.$$

Si ahora usamos $(x_3, y_3) = (0.15, 0.8648)$ y la relación de recurrencia (7.3), con $i = 3$, obtenemos:

$$y_4 = y_3 + h\, f(x_3, y_3) = y_3 + h(x_3 - y_3) = 0.8648 + 0.05(0.15 - 0.8648) = 0.8290\,.$$

Podemos seguir este proceso hasta calcular todos los valores pedidos. En la tabla siguiente se muestran los resultados que corresponden sólo a las abscisas $x = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 1$ para el tamaño de paso $h = 0.05$.
Si ahora consideramos $h = 0.01$, obtenemos los siguientes resultados parciales:

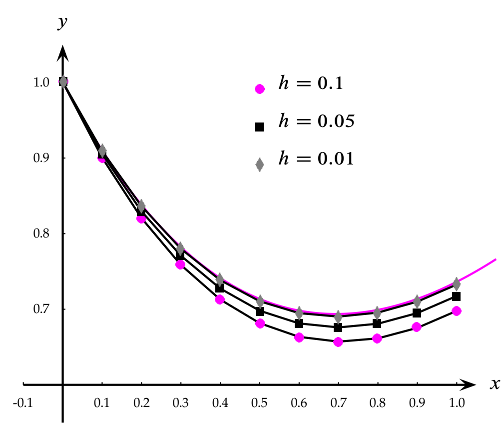
$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h\, f(x_0, y_0) = y_0 + h(x_0 - y_0) = 1 + 0.01(0 - 1) = 0.99;\\
y_2 &= y_1 + h\, f(x_1, y_1) = y_1 + h(x_1 - y_1) = 0.99 + 0.01(0.01 - 0.99) = 0.9802;\\
y_3 &= y_2 + h\, f(x_2, y_2) = y_2 + h(x_2 - y_2) = 0.9802 + 0.01(0.02 - 0.9802) = 0.9706;\\
y_4 &= y_3 + h\, f(x_3, y_3) = y_3 + h(x_3 - y_3) = 0.9706 + 0.01(0.03 - 0.9706) = 0.9612.
\end{aligned}$$

Nuevamente, podemos seguir el proceso hasta obtener los valores solicitados.

En la siguiente tabla se muestran los resultados que corresponden sólo a las abscisas $x = 0, 0.1, 0.2, \ldots, 1$. En la figura siguiente se muestran las gráficas obtenidas para cada caso. Observemos que las curvas se aproximan cada vez más a la gráfica de la solución analítica. Podemos observar que el error de propagación es máximo en $x = 1$ en los tres casos que hemos considerado $h = 0.1, 0.05, 0.01$; esto se ilustra en la figura siguiente:

x_i	$y_i(x)$	$h = 0.1$		$h = 0.05$		$h = 0.01$	
		y_i	EA	y_i	EA	y_i	EA
0	1.0000	1.0000	0	1.0000	0	1.0000	0
0.1	0.9097	0.9000	0.0097	0.9050	0.0047	0.9088	0.0009
0.2	0.8375	0.8200	0.0175	0.8290	0.0085	0.8358	0.0017
0.3	0.7816	0.7580	0.0236	0.7702	0.0114	0.7794	0.0022
0.4	0.7406	0.7122	0.0284	0.7268	0.0138	0.7379	0.0027
0.5	0.7131	0.6810	0.0321	0.6975	0.0156	0.7100	0.0031
0.6	0.6976	0.6629	0.0347	0.6807	0.0169	0.6943	0.0033
0.7	0.6932	0.6566	0.0366	0.6754	0.0179	0.6897	0.0035
0.8	0.6987	0.6609	0.0378	0.6803	0.0184	0.6950	0.0037
0.9	0.7131	0.6748	0.0383	0.6944	0.0187	0.7095	0.0036
1	0.7358	0.6974	0.0384	0.7170	0.0188	0.7321	0.0037

El origen de coordenadas en la gráfica se ha colocado en $(0, 0.6)$.



□

En conclusión, el método de Euler se basa en la aproximación lineal de la solución $y(x)$ en $x = x_0$ y requiere evaluar la función $f(x, y)$ sólo una vez en cada aproximación. Sin embargo, el cálculo se complica al tratar de encontrar una buena solución en un intervalo dado, ya que para reducir los errores de aproximación y propagación se requiere reducir el tamaño de paso y, en consecuencia, se necesita hacer un mayor número de cálculos que con una herramienta de cómputo se pueden realizar rápidamente. Una primera posibilidad es utilizar hojas de cálculo, por ejemplo Excel; una segunda alternativa consiste en implementar el método en algún lenguaje de programación, como Mathematica, siguiendo el pseudocódigo que se indica abajo.

A continuación ilustramos el uso de Excel y Mathematica para resolver ecuaciones diferenciales de primer orden por el método de Euler.

- Pseudocódigo del método de Euler

1. Proporcionar f, x_0, y_0, h, n.
2. Imprimir x_0, y_0.
3. Desde $i = 1$ hasta $i = n$:
   a. Calcular $y_1 = y_0 + h * f(x_0, y_0)$.
   b. Hacer $y_0 = y_1$; $x_0 = x_0 + h$.
   c. Imprimir x_0, y_0.
4. Terminar.

Ejemplo 7.2.11 *Utilice Excel para determinar un valor aproximado de $y(1)$, si $y(x)$ es la solución del PVI:*

$$y' = x^2 y + y, \quad \text{con} \quad y(0) = 1.$$

Considere que el tamaño de paso es $h = 0.1$.

▼ En este caso se repetirá el proceso $n = 10$ veces mediante las siguientes instrucciones para una hoja de cálculo de Excel.

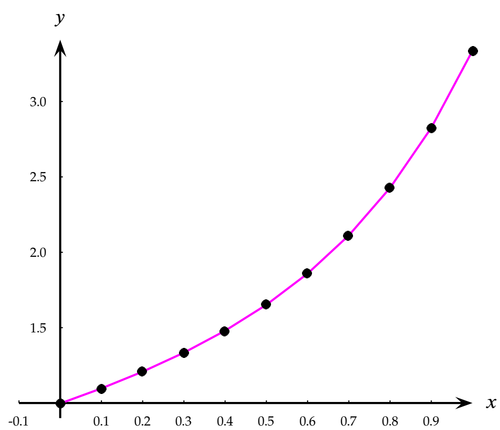
- El método de Euler en Excel

1. En las celdas A1, A2, A3, se escriben las etiquetas: "*x0=, y0=, h=*".
2. En las celdas B1, B2, B3, se escriben "*=0, =1, =0.1*", respectivamente.
3. En las celdas A5, B5, C5, D5, se escriben las etiquetas: "i, xi, yi, ki". Recuerde que $k_i = h\ f(x_i, y_i)$.
4. Se escriben en las celdas A6-A16, los números "$0, 1, 2, \ldots, 10$" .
5. En las celdas B6 y C6, se escriben respectivamente: "*=B1, =B2*" .
6. En la celda D6, se escribe "*=$B$3*(B6ˆ2*C6+C6)* ". Observe que, en este paso, se evalúa la función $f(x, y) = x^2 y + y$ y se multiplica por h. Es decir, se calcula k_i.
7. En la celda B7, se escribe "*=B6+$B$3* ".
8. En la celda C7, escribimos ahora "*=C6+D6*". Observe que, en este paso, estamos en el método de Euler.
9. Se selecciona la celda D6, se copia y se inserta en D7.
10. Se seleccionan las celdas B7-D7 y se arrastran hasta llegar a las celdas B16-D16.
11. Se grafica la solución utilizando el asistente de gráficos con la opción de *XY-Dispersión*.

En la siguiente tabla se muestran los resultados numéricos obtenidos:

i	x_i	y_i	k_i
0	0	1	0.1
1	0.1	1.1	0.1111
2	0.2	1.2111	0.1259544
3	0.3	1.3370544	0.14573893
4	0.4	1.48279333	0.172004026
5	0.5	1.654797356	0.206849669
6	0.6	1.861647025	0.253183995
7	0.7	2.114831021	0.315109822
8	0.8	2.429940843	0.398510298
9	0.9	2.828451141	0.511949657
10	1	3.340400798	0.66808016

La gráfica asociada se presenta en la figura siguiente. El origen de coordenadas en la gráfica se ha colocado en $(0, 1)$.



□

Ejemplo 7.2.12 *Resolver el PVI* $y' = x - 3y$, *con* $y(0) = 1$, *utilizando el método de Euler implementado en Mathematica y repitiendo el proceso* $n = 10$ *veces con tamaño de paso* $h = 0.3$.

▼ Aplicaremos el pseudocódigo en el paquete Mathematica; el programa necesario lo presentamos a continuación con comentarios para su mejor comprensión.

- El método de Euler en Mathematica

```
f[x_,y_]:=x-3y;                (* Definir f *)
x0=0;                          (* Abscisa del punto inicial *)
y0=1;                          (* Ordenada del punto inicial *)
h=0.3;                         (* Incremento en el paso *)
n=10;                          (* Total de pasos a realizar *)
```

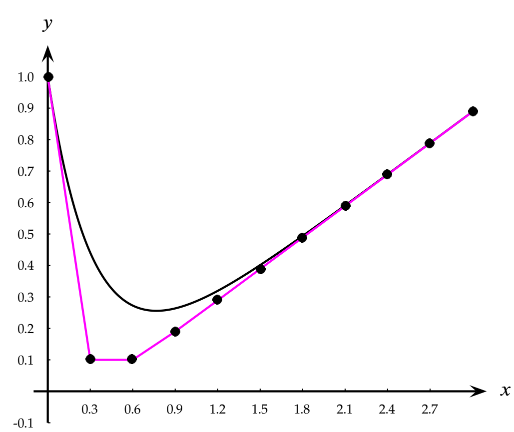
```
lista={{x0,y0}};                    (* Definir lista con punto inicial *)
Do[ y1=y0+ h*f[x0,y0];              (* Determinar y1 *)
    y0=y1;                          (* Intercambiar y0 con y1 *)
    x0=x0+h;                        (* Incrementar x0 *)
    AppendTo[lista,{x0,y0}],        (* Incluir punto en la lista *)
{i,1,n}];                           (* Terminar el proceso *)
ListPlot[lista]                     (* Graficar los puntos obtenidos *)
```

Los resultados que se obtienen se muestran en la tabla siguiente; hemos incluido los valores exactos de la ordenada, los cuales corresponden a la función

$$y(x) = \frac{1}{9}\left(3x - 1 + 10e^{-3x}\right).$$

x	$\tilde{y}_1$	y_{exacto}
0	1	1
0.3	0.1	0.440633
0.6	0.1	0.272554
0.9	0.19	0.263562
1.2	0.289	0.319249
1.5	0.3889	0.401232
1.8	0.48889	0.493907
2.1	0.588889	0.590929
2.4	0.688889	0.689718
2.7	0.788889	0.789226
3.	0.888889	0.889026

También mostramos la gráfica que se obtiene con estos datos en la figura siguiente:



□

Ejercicios 7.2.1 *Euler.* *Soluciones en la página 16*

Determine una aproximación lineal de la solución $y(x)$ de cada uno de los siguientes PVI en el punto indicado utilizando el h proporcionado. En los casos que se requiera, aplique dos veces el proceso de aproximación lineal y estime el error porcentual que se tiene con dicha aproximación.

1. $y' = xy + y$, con $y(4) = 1$ en $x = 4.2$, para $h = 0.2$.
2. $y' = 0.2y - 5y^2$, con $y(0) = 3$ en $x = 0.02$, para $h = 0.01$.
3. $y' = x^2 + 2x - y$, con $y(0) = 1$ en $x = 0.4$, para $h = 0.2$.

Considere los siguientes PVI. Determine una aproximación numérica de la solución en el punto indicado utilizando el método de Euler con el tamaño de paso señalado en cada caso. Utilice redondeo a cuatro cifras decimales en todos sus cálculos.

4. $y' = x^2 + 2y$, con $y(1) = 5$. Calcule $y(1.5)$, para $h = 0.1$.
5. $y' = x^2 + y^2 + x^2y^2 + 1$, con $y(0) = 0$. Calcule $y(0.5)$, para $h = 0.1$.
6. $y' = \dfrac{x^2 + 1}{y}$, con $y(0) = 2$. Calcule $y(0.25)$, para $h = 0.05$.
7. Considere el PVI $y' = 2x + 2y - 1$, con $y(1) = 1$. Calcule $y(1.5)$ para $h = 0.1$.
8. Considere el PVI $y' = 3x - 2y$, con $y(1) = 1$. Calcule $y(1.5)$ para $h = 0.1$.
9. Considere el PVI $P' = 5P - P^2$, con $P(0) = 1.5$. Determine una aproximación numérica de la solución en $t = 0.5$ utilizando el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.1$. Compare su resultado con la solución exacta. Utilice redondeo a cuatro cifras decimales en todos sus cálculos. Repita sus cálculos utilizando un tamaño de paso $h = 0.05$.

Ejercicios 7.2.1 *Método de Euler.* *Página 15*

1. 2.
2. 2.2345.
3. 0.728.
4. 13.4642.
5. 0.5671.
6. 2.1238.
7. 3.4766.
8. 1.5819.
9. 4.2703.