CAPÍTULO

1

La integral

1.7 Teorema Fundamental del Cálculo I

Presentamos la primera parte del teorema Fundamental del Cálculo (TFC I), teorema importante que permite calcular integrales definidas de manera directa. Además, este teorema revela la relación que existe entre los procesos de derivación e integración; Isaac Newton (1642–1727) y Gottfried Leibnitz (1646–1726) descubrieron y publicaron de manera independiente este resultado, por lo que se les considera los padres fundadores del cálculo. Comenzaremos aquí por estudiar lo que sucede al integrar la derivada de una función conocida.

Para obtener el resultado que buscamos haremos uso del teorema del Valor Medio para derivadas, por lo que conviene recordar su enunciado:

Teorema 1.1 *Del Valor Medio para Derivadas. Si $y = F(x)$ es una función continua en un intervalo $[a, b]$ y diferenciable para todo punto en su interior (a, b), entonces para algún número $c \in [a, b]$:*

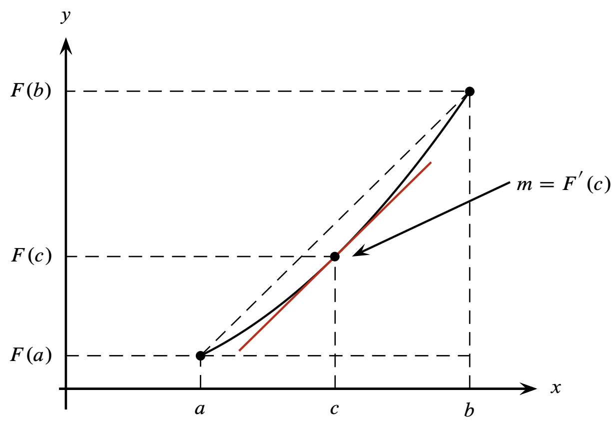
$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c),$$

o equivalentemente:

$$F(b) - F(a) = F'(c)(b - a).$$

La siguiente figura refleja el resultado de este teorema:

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017



Si bien el teorema del Valor Medio no dice en donde exactamente se encuentra el punto c que cumplirá la igualdad anterior, sí garantiza que tal punto c existe y se encuentra dentro del intervalo, es decir, $a \leq c \leq b$. Supongamos ahora que $y = F(x)$ es una función continua y diferenciable en un intervalo $[a, b]$ y consideremos una partición cualquiera

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

del intervalo $[a, b]$. Entonces podemos escribir, usando una suma telescópica:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \ldots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} F(x_i) - F(x_{i-1}). \end{aligned}$$

Como $F(x)$ es continua y diferenciable en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, el teorema del Valor Medio garantiza que existe en dicho subintervalo un x_i^* tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}),$$

de modo que

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^{n} F'(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} F'(x_i^*)\Delta x_i; \tag{1.1}$$

esta última es una suma de Riemann que, al tomar el límite sobre particiones que cumplan

$$n \to \infty \;\&\; \Delta x_i \to 0, \text{ converge a la integral } \int_a^b F'(x)dx.$$

Dado que el extremo izquierdo de las igualdades (1.1) no depende de la partición (o de n), concluimos:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)dx.$$

Resulta conveniente reescribir el resultado anterior como sigue:

$$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Para referencias futuras escribimos a continuación el enunciado del teorema Fundamental del Cálculo.

- Teorema Fundamental del Cálculo, primera parte (TFC I)

  Sea la función $f(x)$ continua en el intervalo $[a, b]$. Si $F(x)$ es una función definida y diferenciable en $[a, b]$ tal que

$$F'(x) = f(x),$$

entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \tag{1.2}$$

A la función $F(x)$ se le denomina primitiva o antiderivada de $f(x)$, por la relación que guarda con la función del integrando.

Ejemplo 1.7.1 *Demostrar que las funciones $F_1(x) = 2x^2 + 1$ & $F_2(x) = 2x^2 - 5$ son primitivas de $f(x) = 4x$; emplearlas para calcular $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.*

▼ Para comprobar, solo tenemos que derivar:

$$\frac{d}{dx}F_1(x) = \frac{d}{dx}(2x^2+1) = 4x = f(x) \quad \& \quad \frac{d}{dx}F_2(x) = \frac{d}{dx}(2x^2-5) = 4x = f(x).$$

Observe que la diferencia entre $F_1(x)$ & $F_2(x)$ es una constante:

$$F_1(x) - F_2(x) = (2x^2+1) - (2x^2-5) = 6.$$

Ahora, la integral pedida es, usando $F_1(x)$:

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F_1(x)\Big|_0^4 = (2x^2+1)\Big|_0^4 = [2(4)^2+1] - [2(0)^2+1] = [32+1] - [1] = 32+1-1 = 32.$$

Obtenemos el mismo resultado usando $F_2(x)$:

$$\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = F_2(x)\Big|_0^4 = (2x^2-5)\Big|_0^4 = [2(4)^2-5] - [2(0)^2-5] = [32-5] - [-5] = 32-5+5 = 32.$$

□

La utilidad del TFC I estriba en que con su ayuda podemos evaluar la integral definida de cualquier función para la cual conozcamos (o podamos encontrar) una primitiva. El siguiente resultado debe tenerse en cuenta:

- Si $F(x)$ y si $G(x)$ son primitivas de $f(x)$, entonces $F(x) - G(x) = C$.
  ▼ Como $F' = f(x)$ y $G' = f(x)$, la función $h(x) = F(x) - G(x)$ cumple:

$$h'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow h(x) = C \Rightarrow F(x) - G(x) = C \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F(x) = G(x) + C.$$

□

Todas las fórmulas de diferenciación nos pueden servir para encontrar dichas primitivas y evaluar integrales como se ve en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.7.2 *Sabiendo que $F(x) = 3x^2 - 8x + 5 \Rightarrow F'(x) = 6x - 8$, calcular $\int_{-3}^2 (6x-8)\,\mathrm{d}x$.*

▼

$$\int_{-3}^2 (6x-8)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^2 F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{-3}^2 = F(2) - F(-3) =$$
$$= [3(2)^2 - 8(2) + 5] - [3(-3)^2 - 8(-3) + 5] = [12 - 16 + 5] - [27 + 24 + 5] = -55.$$

□

Ejemplo 1.7.3 *La derivada de* $F(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 2}$ *es* $F'(x) = \dfrac{(x-2)2x - (x^2-1)\cdot 1}{(x-2)^2} = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$*; calcular* $\displaystyle\int_3^6 \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x$.

▼

$$\int_3^6 \frac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}\,\mathrm{d}x = \int_3^6 F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_3^6 = F(6) - F(3) =$$
$$= \frac{6^2 - 1}{6 - 2} - \frac{3^2 - 1}{3 - 2} = \frac{36 - 1}{4} - \frac{9 - 1}{1} = \frac{35}{4} - 8 = \frac{3}{4}.$$

Vale la pena aclarar que el integrando $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2}$ es una función no acotada en $x = 2$, así que no podemos aplicar el TFC I en un intervalo que contenga $x = 2$. Se debe verificar, al aplicar el TFC-I, que el integrando sea una función continua en todo el intervalo de integración para evitar resultados contradictorios, como se muestra en el siguiente ejemplo.

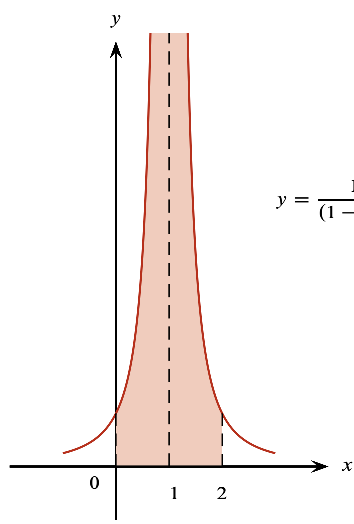
□

Ejemplo 1.7.4 *La función* $F(x) = \dfrac{1}{1 - x} = (1 - x)^{-1}$ *es primitiva de* $F'(x) = -1(1-x)^{-2}(-1) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$*; calcular* $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x$.

▼ Si aplicamos el TFC I sin poner atención a las hipótesis del teorema, obtenemos:

$$\int_0^2 \frac{1}{(1-x)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-x}\Big|_0^2 = \frac{1}{1-2} - \frac{1}{1-0} = -1 - 1 = -2.$$

El resultado anterior es incorrecto. Veamos por qué. La función del integrando $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ tiene la gráfica siguiente:



Si interpretamos la integral como un área, el resultado que calculamos nos dice que el área bajo la curva sobre el eje x entre $x = 0$ & $x = 2$ es -2, cuando en realidad o bien no está definida, o bien es infinita. La explicación de esta contradicción es que el integrando es una función con una discontinuidad de tipo infinito en $x = 1$, valor que queda dentro del intervalo de integración. En este caso no es posible aplicar el TFC I.

□

Ejemplo 1.7.5 *Calcular* $\int_2^5 (3x^2 - 2x + 1)\ \mathrm{d}x$.

▼ La función $F(x) = x^3 - x^2 + x$ es una primitiva del integrando, pues $F'(x) = 3x^2 - 2x + 1$, por lo tanto:

$$\int_2^5 (3x^2 - 2x + 1)\ \mathrm{d}x = (x^3 - x^2 + x)\Big|_2^5 = (5^3 - 5^2 + 5) - (2^3 - 2^2 + 2) =$$
$$= (125 - 25 + 5) - (8 - 4 + 2) = 105 - 6 = 99.$$

□

A diferencia de los ejemplos anteriores, en este último se pide calcular una integral sin hacer referencia previa a una función primitiva; esta se obtuvo basándonos en conocimientos previos sobre derivadas, a saber

$$\frac{d}{dx}x^3 = 3x^2; \quad \frac{d}{dx}x^2 = 2x \quad \& \quad \frac{d}{dx}x = 1,$$

junto con la conocida propiedad de que la derivada de una suma de funciones es la suma de las derivadas. Este tipo de razonamiento es el que usaremos en lo sucesivo para calcular integrales; buscaremos en cada caso una primitiva, usando diferentes medios a nuestro alcance y terminaremos evaluando $F(x)\Big|_a^b$. Para encontrar la función primitiva, necesitamos desarrollar cierta habilidad, la cual se consigue partiendo de un conocimiento completo de las fórmulas de derivación aunado a una sistematización de técnicas que se presentarán en las secciones y capítulos siguientes. Por el momento cerramos esta sección presentando dos resultados elementales que nos permitirán integrar por lo menos cualquier función polinomial.

- Integración de funciones potencia

  Si $f(x) = x^k$ con $k \neq -1$ y si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a, b]$, entonces $F(x) = \dfrac{x^{k+1}}{k+1}$ es una primitiva de $f(x)$.

  ▼ Al derivar vemos:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^{k+1}}{k+1}\right) = \frac{1}{k+1}\frac{d}{dx}x^{k+1} = \frac{1}{k+1}(k+1)x^k = x^k.$$

□

  En consecuencia,

$$\int_a^b x^k\ \mathrm{d}x = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1};\ \text{con } k \neq -1. \tag{1.3}$$

Observe que esta fórmula es válida para todo exponente $k \neq -1$ (aún cuando k sea racional, negativo o irracional). La única condición es que $f(x) = x^k$ sea continua en todo el intervalo $[a, b]$. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.7.6 *Las siguientes integrales se evalúan por aplicación directa de la integración de funciones potencia:*

▼

1. $\displaystyle\int_2^7 x^3\ \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\Big|_2^7 = \frac{7^4 - 2^4}{4} = \frac{2\,401 - 16}{4} = \frac{2\,385}{4} = 596.25\,.$

2. $\displaystyle\int_{-1}^3 x^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}}\Big|_{-1}^3 = \frac{3}{4}\left(3^{\frac{4}{3}} - (-1)^{\frac{4}{3}}\right) = \frac{3^{\frac{7}{3}} - 3}{4}.$

3. $\displaystyle\int_3^5 x^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_3^5 = 2\left(5^{\frac{1}{2}} - 3^{\frac{1}{2}}\right) = 2(\sqrt{5}-\sqrt{3}).$

4. $\displaystyle\int_1^{10} x^{\sqrt{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1}\Bigg|_1^{10} = \frac{10^{\sqrt{2}+1} - 1^{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{2}+1} = \frac{10^{\sqrt{2}+1}-1}{\sqrt{2}+1}.$

5. $\displaystyle\int_2^4 x^{\pi}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1}\Bigg|_2^4 = \frac{4^{\pi+1} - 2^{\pi+1}}{\pi+1}.$

□

Ejemplo 1.7.7 *Cuando el exponente k en $f(x) = x^k$ sea negativo, es preciso cuidar que el intervalo de integración no contenga 0, donde esta función es no acotada. Así por ejemplo las integrales 1. y 2. siguientes son correctas, pero la 3. no lo es:*

▼

1. $$\int_2^3 x^{-3}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{-2}}{-2}\Bigg|_2^3 = -\frac{1}{2}(3^{-2} - 2^{-2}) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{2^2}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{4-9}{36}\right) = -\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{36}\right) = \frac{5}{72}.$$

2. $$\int_9^{25} x^{-\frac{3}{2}}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_9^{25} = -2(25^{-\frac{1}{2}} - 9^{-\frac{1}{2}}) = -2\left(\frac{1}{\sqrt{25}} - \frac{1}{\sqrt{9}}\right) =$$
$$= -2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = -2\left(\frac{3-5}{15}\right) = -2\left(-\frac{2}{15}\right) = \frac{4}{15}.$$

3. $$\int_{-2}^1 x^{-2}\ \mathrm{d}x = \frac{x^{-1}}{-1}\Bigg|_{-2}^1 = -(1^{-1} - (-2)^{-1}) = -\left(1 - \frac{1}{-2}\right) = -\left(1 + \frac{1}{2}\right) =$$
$$= -\frac{3}{2}.$$
Este último resultado es incorrecto. ¿Puede el lector explicar por qué?

□

Por la propiedad de linealidad enunciada en la sección anterior, para funciones integrables $f(x), g(x)$ sobre el intervalo $[a,b]$ y constantes r, s cualesquiera:

$$\int_a^b [rf(x) + sg(x)]\ \mathrm{d}x = r\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x + s\int_a^b g(x)\ \mathrm{d}x.$$

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (3x^2 - 10x + 7)\ \mathrm{d}x &= 3\int_1^2 x^2\ \mathrm{d}x - 10\int_1^2 x\ \mathrm{d}x + 7\int_1^2 \mathrm{d}x = \\ &= \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}}\Bigg|_1^2 - 10\frac{x^2}{2}\Bigg|_1^2 + 7x\Bigg|_1^2 = \\ &= (2^3 - 1^3) - 5(2^2 - 1^2) + 7(2-1) = \\ &= 7 - 15 + 7 = -1.\end{aligned}$$

Es posible integrar un polinomio sobre cualquier intervalo, o bien una suma de potencias (distintas de -1) sobre un intervalo en donde sea continua usando la fórmula:

$$\int_a^b (rx^k + sx^\ell)\ \mathrm{d}x = \left(r\frac{x^{k+1}}{k+1} + s\frac{x^{\ell+1}}{\ell+1}\right)\Bigg|_a^b.$$

Por ejemplo:

$$\int_4^9 (x^2 - x^{\frac{1}{2}})\ \mathrm{d}x = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\Big|_4^9 =$$
$$= \left[\frac{9^3}{3} - \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}}\right] - \left[\frac{4^3}{3} - \frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}}\right] = 225 - 16 = 209.$$

Ejercicios 1.7.1 *TFC I.* *Soluciones en la página 8*

Calcule las integrales siguientes utilizando la linealidad y la integral de funciones potencias:

1. $\displaystyle\int_0^5 (3\sqrt{x} + 5x^3)\ \mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_1^8 \frac{x^2 - 3x}{\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_{-3}^3 (x^{\frac{1}{3}} - x^3)\ \mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_2^{10} \frac{x^2 - 1}{x - 1}\ \mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_3^7 \frac{x^3 - 8}{x - 2}\ \mathrm{d}x$.
6. $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{x^3 + 27}{x + 3}\ \mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_3^4 \frac{x - 2}{\sqrt{x} - \sqrt{2}}\ \mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_1^3 \frac{x - 9}{\sqrt{x} + 3}\ \mathrm{d}x$.
9. $\displaystyle\int_3^1 \frac{\sqrt{x}(x^2 - 3x + 2)}{x - 2}\ \mathrm{d}x$.
10. $\displaystyle\int_3^1 \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x}(x - 2)}\ \mathrm{d}x$.

Calcule el área comprendida entre el eje x y la gráfica de la función entre los límites indicados:

11. $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, entre $x = 1$ & $x = 8$.
12. $g(x) = x^5 - 3x^3$, entre $x = -2$ & $x = 2$.
13. $h(x) = 4x^2 + 2x^4$, entre $x = -1$ & $x = 1$.
14. $\Phi(x) = ax^n$ con n un número natural impar, entre $x = -a$ & $x = a$.

Compruebe las fórmulas de derivación propuestas y complete la fórmula de integración; indique las condiciones necesarias sobre el intervalo $[a, b]$, para su validez.

15. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2 + 1}{x - 1}\right) = \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)^2}$; calcule $\displaystyle\int_a^b \frac{x^2 - 2x - 1}{(x - 1)}\ \mathrm{d}x$.
16. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^3 - x^2}{x^2 + 1}\right) = \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2}$; calcule $\displaystyle\int_a^b \frac{x^4 + 3x^2 - 2x}{(x^2 + 1)^2}\ \mathrm{d}x$.
17. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt[3]{(x^2 + 3x + 2)^2} = \frac{2x + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x + 2)^2}}$; calcule $\displaystyle\int_a^b \frac{2x + 3}{3\sqrt[3]{(x^2 + 3x + 2)^2}}\ \mathrm{d}x$.
18. $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}x\sqrt{x + 1} = \frac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}$; calcule $\displaystyle\int_a^b \frac{3x + 2}{2\sqrt{x + 1}}\ \mathrm{d}x$.

Ejercicios 1.7.1 *TFC I. Preguntas, página 7*

Evalúe las integrales solicitadas utilizando la linealidad y la integral de funciones potencias:

1. 803.611 .
2. 28.7529 .
3. $\dfrac{9}{4}\left[(-3)^{\frac{1}{3}}+3^{\frac{1}{3}}\right]$.
4. 56 .
5. $\dfrac{484}{3}$.
6. $\dfrac{51}{2}$.
7. 3.28345 .
8. -3.2026 .
9. -3.0388 .
10. -4.3713 .

Calcule el área comprendida entre el eje x y la gráfica de la función entre los límites indicados:

11. -18.6 .
12. 0 .
13. 3.4667 .
14. 0 .

Compruebe las fórmulas de derivación propuestas y complete la fórmula de integración, dando las condiciones necesarias sobre el intervalo $[a,b]$, para su validez.

15. $\displaystyle\int_a^b \frac{x^2-2x-1}{(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+1}{x-1}$ donde $1 \notin [a,b]$.
16. $\displaystyle\int_a^b \frac{x^4+3x^2-2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{x^3-x^2}{x^2+1}, \quad x \in [a,b]$.
17. $\displaystyle\int_a^b \frac{2x+3}{3\sqrt[3]{(x^2+3x+2)^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt[3]{(x^2+3x+2)^2}$ donde $-2\ \&\ -1 \notin [a,b]$.
18. $\displaystyle\int_a^b \frac{3x+2}{2\sqrt{x+1}}\,\mathrm{d}x = x\sqrt{x+1}$ donde $[a,b] \subset (-1,\infty)$.