CAPÍTULO

1

La integral

1.8 La antiderivada y la integral indefinida

El teorema Fundamental del Cálculo constituye una herramienta muy poderosa para el cálculo de las integrales, pues nos permitirá considerar casos cada vez más complejos, que iremos abordando más adelante.

Recordemos el TFC I:

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

siempre que $F'(x)$ sea continua en $[a, b]$.

De esta manera, cualquier fórmula de derivación se puede convertir en una fórmula de integración.
Por ejemplo, si $F(x) = \sqrt{x^2+1}$, entonces $F'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} = f(x)$ y así:

$$\int_a^b \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{x^2+1}\,\Big|_a^b = \sqrt{b^2+1} - \sqrt{a^2+1},$$

aclarando que la función $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ es continua en $\mathbb{R}$.

Cuando $F(x)$ es una primitiva o antiderivada de $f(x)$, se menciona que es una antiderivada porque en realidad hay una infinidad de funciones que son antiderivadas de la función $f(x)$, por ejemplo:

$$G(x) = \sqrt{x^2+1} + 2 \;\&\; H(x) = \sqrt{x^2+1} - 5 \text{ son también antiderivadas de } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ya hemos visto que dos antiderivadas de una misma función difieren en una constante. Esta situación nos lleva a la siguiente definición:

canek.azc.uam.mx: 30/ 1/ 2017

Definición. El conjunto infinito de primitivas $\{ F(x) + C \}$ de la función $f(x)$, se denomina integral indefinida de $f(x)$ y se denota por:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + C.$$

Esta integral indefinida no es una función, sino una familia infinita de funciones, de modo que dos de ellas difieren entre sí solo por una constante. Dicho de otra forma, la notación introducida equivale a:

$$\int f(x)\, \mathrm{d}x = F(x) + C \qquad \Longleftrightarrow \qquad F'(x) = f(x).$$

Con esta notación podemos transformar cualquier fórmula de derivación en una fórmula de integral indefinida. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1.8.1 *Transformar las siguientes fórmulas de derivadas en fórmulas de integrales indefinidas:*

1. $\dfrac{d}{dx}x^r = rx^{r-1}\ (r \neq 0)$.
2. $\dfrac{d}{dx}(x^2+1)^{-1} = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}$.
3. $\dfrac{d}{dx}\left[(x+1)(x^2+2)\right] = (x^2+2) + 2x(x+1)$.

▼

1. $\int rx^{r-1}\, \mathrm{d}x = x^r + C$.
2. $\int \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2}\, \mathrm{d}x = \dfrac{1}{x^2+1} + C$.
3. $\int [(x^2+2) + 2x(x+1)]\, \mathrm{d}x = (x+1)(x^2+2) + C$.

□

Ejemplo 1.8.2 *Convertir las siguientes integrales indefinidas en fórmulas de derivación:*

1. $\int (3x^2 + 2x - 1)\, \mathrm{d}x = x^3 + x^2 - x + C$.
2. $\int \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}\, \mathrm{d}x = \sqrt{x^3+5} + C$.
3. $\int \sqrt{x^2-3x+2}(2x-3)\, \mathrm{d}x = \dfrac{2}{3}(x^2-3x+2)^{\frac{3}{2}} + C$.

▼

1. $\dfrac{d}{dx}\left(x^3 + x^2 - x + C\right) = 3x^2 + 2x - 1$.
2. $\dfrac{d}{dx}\left(\sqrt{x^3+5} + C\right) = \dfrac{1}{2}(x^3+5)^{-\frac{1}{2}}3x^2 = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$.
3. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{2}{3}(x^2-3x+2)^{\frac{3}{2}} + C\right] = \dfrac{2}{3}\dfrac{3}{2}(x^2-3x+2)^{\frac{1}{2}}(2x-3) = \sqrt{x^2-3x+2}\,(2x-3)$.

□

1.8.1 Relación entre la integral definida y la indefinida

Es preciso determinar la relación que hay entre la integral definida e indefinida, para evitar posibles confusiones.

Para empezar, recordamos al lector que una integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tiene límites o extremos de integración y da como resultado un número o una expresión que no contiene a la variable x de integración. Frecuentemente a esta variable se le llama variable muda ya que se puede sustituir con otra literal sin cambiar el resultado. Así por ejemplo:

$$\int_1^5 2x\,\mathrm{d}x = x^2\Big|_1^5 = 5^2 - 1^2 = 24 \quad \text{y también} \quad \int_1^5 2t\,\mathrm{d}t = \int_1^5 2w\,\mathrm{d}w = 24.$$

Esto es, sea cual sea la literal utilizada en el integrando, el resultado es el mismo número real.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Como ya se mencionó, la integral indefinida $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ representa a la familia infinita de funciones que son antiderivadas de $f(x)$.

$$\text{Si } \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C \Rightarrow \qquad \boxed{\text{Por el TFC I}}$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x) + C]\Big|_a^b =$$

$$= [F(b) + \cancel{C}] - [F(a) + \cancel{C}] = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

⋆ Resumiendo: para calcular la integral definida $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, podemos primero calcular la integral indefinida $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ y luego considerar los extremos a, b para determinar $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Esto es:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)\Big|_a^b.$$

Por ejemplo:

$$\int_1^5 2x\,\mathrm{d}x = \left(\int 2x\,\mathrm{d}x\right)\Big|_1^5 = (x^2 + C)\Big|_1^5 = (5^2 + \cancel{C}) - (1^2 + \cancel{C}) = 24.$$

En la práctica no es necesario usar la constante C, llamada constante de integración, para calcular la integral definida.

Ejemplo 1.8.3 *Utilizar los ejemplos 1.8.1 y 1.8.2 para evaluar las siguientes integrales definidas:*

1. $\displaystyle\int_1^{10} \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$
2. $\displaystyle\int_2^5 [(x^2+2) + 2x(x+1)]\,\mathrm{d}x.$
3. $\displaystyle\int_{-1}^{\sqrt[3]{4}} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}\,\mathrm{d}x.$
4. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x^2-3x+2}(2x-3)\,\mathrm{d}x.$

▼

1. Por el ejemplo 1.8.1 (2.) tenemos:

$$\int_1^{10} \frac{-2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{x^2+1}\Big|_1^{10} = \frac{1}{10^2+1} - \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{101} - \frac{1}{2} = \frac{2-101}{202} = -\frac{99}{202}.$$

2. Por el ejemplo 1.8.1 (3.) vemos:

$$\int_2^5 [(x^2+2)+2x(x+1)]\ \mathrm{d}x = (x+1)(x^2+2)\Big|_2^5 = (6)(27)-(3)(6) = 144.$$

3. Del ejemplo 1.8.2 (2.) obtenemos:

$$\int_{-1}^{\sqrt[3]{4}} \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}\ \mathrm{d}x = \sqrt{x^3+5}\,\Big|_{-1}^{\sqrt[3]{4}} = \sqrt{(\sqrt[3]{4})^3+5} - \sqrt{(-1)^3+5} = \sqrt{9}-\sqrt{4} = 1.$$

Observe que el integrando $\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+5}}$ es una función continua en $[-1, \sqrt[3]{4}]$.

4. Por último del ejemplo 1.8.2 (3.) concluimos que

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x^2-3x+2}(2x-3)\ \mathrm{d}x &= \frac{2}{3}(x^2-3x+2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \\ &= \frac{2}{3}(1^2-3\cdot 1+2)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(0^2-3\cdot 0+2)^{\frac{3}{2}} = \\ &= \frac{2}{3}0^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}2^{\frac{3}{2}} = -\frac{4\sqrt{2}}{3}.\end{aligned}$$

Observe que $f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}(2x-3)$ es una función continua en $[0, 1]$.

□

1.8.2 Propiedades básicas de la integral indefinida

La integral indefinida $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ comparte con su derivada $f(x)$ algunas propiedades importantes, que enumeramos a continuación:

1. *Aditividad.* Si las integrales $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ & $\int g(x)\ \mathrm{d}x$ se conocen, entonces:

$$\int (f(x)\pm g(x))\ \mathrm{d}x = \int f(x)\ \mathrm{d}x \pm \int g(x)\ \mathrm{d}x. \tag{1.1}$$

Esta propiedad desde luego se puede extender a cualquier suma finita de funciones.

2. *Homogeneidad.* Si k es cualquier constante, entonces:

$$\int kf(x)\ \mathrm{d}x = k\int f(x)\ \mathrm{d}x. \tag{1.2}$$

3. *Integral indefinida de funciones potencia.* Para cualquier exponente $r \neq -1$:

$$\int x^r\ \mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C. \tag{1.3}$$

Ejemplo 1.8.4 *Calcular las siguientes integrales indefinidas:*

1. $\displaystyle\int \left(5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\ \mathrm{d}x.$

2. $\displaystyle\int \frac{3x^5-7x^3}{x^2}\ \mathrm{d}x.$

3. $\int (2x + 3x^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{d}x$.

▼ Las tres primeras integrales se calculan aplicando las propiedades 1., 2., 3. de la integral indefinida y algunas operaciones algebraicas. Es importante recalcar que, en la medida de lo posible, ante problemas como estos resulta conveniente simplificar (algebraicamente) las funciones antes de integrar.

1. $$\int \left(5x^4 - 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x = 5\int x^4\ \mathrm{d}x - 3\int x^2\ \mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{d}x =$$
$$= \cancel{5}\frac{x^5}{\cancel{5}} - \cancel{3}\frac{x^3}{\cancel{3}} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{\cancel{2}}} + C =$$
$$= x^5 - x^3 + \sqrt{x} + C.$$

2. $$\int \frac{3x^5 - 7x^3}{x^2}\ \mathrm{d}x = 3\int \frac{x^5}{x^2}\ \mathrm{d}x - 7\int \frac{x^3}{x^2}\ \mathrm{d}x =$$
$$= 3\int x^3\ \mathrm{d}x - 7\int x\ \mathrm{d}x = 3\frac{x^4}{4} - 7\frac{x^2}{2} + C.$$

3. $$\int (2x + 3x^{\frac{1}{2}})x^{\frac{1}{3}}\ \mathrm{d}x = \int (2x\cdot x^{\frac{1}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{1}{3}})\ \mathrm{d}x =$$
$$= \int (2x^{\frac{4}{3}} + 3x^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}})\ \mathrm{d}x = 2\int x^{\frac{4}{3}}\ \mathrm{d}x + 3\int x^{\frac{5}{6}}\ \mathrm{d}x =$$
$$= 2\frac{x^{\frac{7}{3}}}{\frac{11}{6}} + 3\frac{x^{\frac{11}{6}}}{\frac{11}{6}} + C = \frac{6}{7}x^{\frac{7}{3}} + \frac{18}{11}x^{\frac{11}{6}} + C.$$

□

En síntesis, hemos visto en esta sección que la integral indefinida $\int f(x)\ \mathrm{d}x$ es una notación adecuada para representar a la familia de todas las antiderivadas de $f(x)$, que difieren entre sí por una constante aditiva, y que toda fórmula de derivación se puede convertir en una fórmula de integral indefinida, junto con sus propiedades elementales.

Ejercicios 1.8.1 *La integral indefinida 1.* *Soluciones en la página 11*

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\int (3x^2 - 4x + 5)\,\mathrm{d}x$.
2. $\int (3x^{-2} - 4x^{-4} + 5)\ \mathrm{d}x$.
3. $\int (3x^2 - 4x + 5)(2x^3)\,\mathrm{d}x$.
4. $\int (3x^2 - 4x + 5)(6\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.
5. $\int (3\sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} + 5)(4\sqrt[3]{x^2})\,\mathrm{d}x$.
6. $\int \frac{3\sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} + 5}{4\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.
7. $\int (2x^3 + 5)^2\,\mathrm{d}x$.
8. $\int \mathrm{d}x$.
9. $\int \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^3\mathrm{d}x$.
10. $\int (2x^3 + 5)^2(2x^2)\,\mathrm{d}x$.
11. $\int (3x^2 - 2)6x\,\mathrm{d}x$.
12. $\int \left(1 - \frac{1}{x}\right)^3 x^{-2}\,\mathrm{d}x$.

Calcular las siguientes integrales definidas:

1. $\displaystyle\int_{-1}^{1}(3x^2-4x+5)(2x^3)\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int_{0}^{1}(3x^2-4x+5)(6\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$.
3. $\displaystyle\int_{1}^{4}\frac{3x^2-4x+5}{6\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
4. $\displaystyle\int_{0}^{1}(3\sqrt{x}-4\sqrt{x^3}+5)(4\sqrt[3]{x^2})\,\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_{1}^{8}\frac{3\sqrt{x}-4\sqrt{x^3}+5}{4\sqrt[3]{x^2}}\,\mathrm{d}x$.

1.8.3 Integrales de funciones trascendentes

Las derivadas de funciones trascendentes nos permiten calcular otro tipo de integrales.

1. Logaritmo natural: sabemos que $\ln|\,x\,|$ es una función definida para $x\neq 0$, continua y con derivada

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln|\,x\,| = \frac{1}{x},$$

por lo que

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|\,x\,| + C.$$

Ejemplo 1.8.5 *Calcule las siguientes integrales:*

a. $\displaystyle\int_{2}^{10}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

b. $\displaystyle\int_{1}^{T}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

c. $\displaystyle\int_{-3}^{-2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

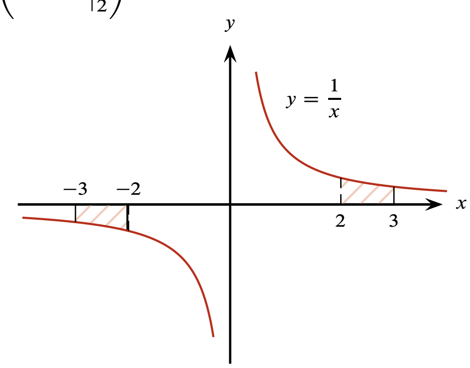
d. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$

▼

a. $\displaystyle\int_{2}^{10}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\,\Big|_{2}^{10} = \ln 10 - \ln 2 = \ln\left(\frac{10}{2}\right) = \ln 5.$

b. $\displaystyle\int_{1}^{T}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln x\,\Big|_{1}^{T} = \ln T - \cancel{\ln 1} = \ln T.$

c. $\displaystyle\int_{-3}^{-2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\int_{2}^{3}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \left(-\ln x\,\Big|_{2}^{3}\right) = -(\ln 3 - \ln 2) = \ln 2 - \ln 3.$



Otra forma de calcular esta integral es

$$\int_{-3}^{-2}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|\,x\,|\,\Big|_{-3}^{-2} = \ln|-2\,| - \ln|-3\,| = \ln 2 - \ln 3.$$

d. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, \mathrm{d}x = \text{No existe, pues } \frac{1}{x} \text{ no es continua en } [-1, 1].$

□

2. Exponencial natural: la función e^x es la única que goza de la propiedad de ser su propia derivada,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = e^x.$$

Por consiguiente su integral indefinida es

$$\int e^x = e^x + C.$$

Además e^x es continua y diferenciable para todo x, por lo que esta fórmula de integración se aplica sin restricciones. Por la regla de la Cadena para cualquier constante a se tiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{ax} = a \cdot e^{ax}, \text{ o } \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{e^{ax}}{a} = e^{ax};$$

por lo que

$$\int e^{ax}\, \mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a} + C.$$

Ejemplo 1.8.6 *Calcule las integrales*

a. $\displaystyle\int_{1}^{5} e^x\, \mathrm{d}x.$

b. $\displaystyle\int_{0}^{10} 3e^{2x}\, \mathrm{d}x.$

c. $\displaystyle\int_{-2}^{4} e^{-3x}\, \mathrm{d}x.$

▼

a. $\displaystyle\int_{1}^{5} e^x\, \mathrm{d}x = e^x \Big|_{1}^{5} = e^5 - e^1.$

b. $\displaystyle\int_{0}^{10} 3e^{2x}\, \mathrm{d}x = 3 \cdot \frac{e^{2x}}{2} \Big|_{0}^{10} = 3\left(\frac{e^{20}}{2} - \frac{e^0}{2}\right) = \frac{3}{2}(e^{20} - 1).$

c. $\displaystyle\int_{-2}^{4} e^{-3x}\, \mathrm{d}x = \frac{e^{-3x}}{-3} \Big|_{-2}^{4} = \frac{e^{-12}}{-3} - \frac{e^6}{-3} = \frac{1}{3}(e^6 - e^{-12}).$

□

3. Logaritmos y exponenciales de otras bases: si $a > 0$ & $a \neq 1$, tenemos las fórmulas de derivación

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) = a^x \ln a;$$

de las cuales resultan las integrales indefinidas:

$$\int \frac{1}{x \ln a}\, \mathrm{d}x = \log_a x + C; \qquad \int a^x \ln a\, \mathrm{d}x = a^x + C.$$

Ejemplo 1.8.7 *Calcule las integrales* *a.* $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x\ln 3}\,dx.$ *b.* $\displaystyle\int_{-1}^4 2^x \ln 2\,dx.$

▼

a. $\displaystyle\int_2^7 \frac{1}{x\ln 3}\,dx = \log_3 x\,\Big|_2^7 = \log_3 7 - \log_3 2.$

b. $\displaystyle\int_{-1}^4 2^x \ln 2\,dx = 2^x\,\Big|_{-1}^4 = 2^4 - 2^{-1} = 16 - \frac{1}{2} = \frac{31}{2}.$

□

4. Funciones trigonométricas: estas funciones son continuas y diferenciables en sus respectivos dominios, con derivadas:

$\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} x = \cos x$	$\dfrac{d}{dx}\cos x = -\operatorname{sen} x$
$\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$	$\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
$\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$	$\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

Convirtiendo esas derivadas en integrales indefinidas, obtenemos:

$\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$	$\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$
$\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$	$\displaystyle\int \csc^2 x\,dx = -\cot x + C$
$\displaystyle\int \sec x \tan x\,dx = \sec x + C$	$\displaystyle\int \csc x \cot x\,dx = -\csc x + C$

Al calcular integrales definidas de funciones trigonométricas se debe tener buen cuidado de hacerlo sobre intervalos en donde la función del integrando sea continua.

Ejemplo 1.8.8 *Evaluar las integrales*

a. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx.$

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sec^2 x\,dx.$

c. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \csc x \cot x\,dx.$ *en* $x = 0.$

▼

a. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx = \operatorname{sen} x\,\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \operatorname{sen}\pi - \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 - (-1) = 1.$

b. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3\sec^2 x \, \mathrm{d}x = 3\tan x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 3\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - 3\tan(0) = 3.$

c. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \csc x \cot x \, \mathrm{d}x$ no existe, pues $\csc x \cot x$ tiene una discontinuidad de tipo ∞ en $x = 0$.

□

5. Funciones trigonométricas inversas: su dominio, rango (imagen) y derivada son

Función	Dominio	Rango	Derivada
$\arcsen x$	$[-1, 1]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \arcsen x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$[-\infty, \infty]$	$\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$
$\operatorname{arccot} x$	$[-\infty, \infty]$	$[0, \pi]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \operatorname{arccot} x = \frac{-1}{1+x^2}$
$\operatorname{arcsec} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \operatorname{arcsec} x = \frac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{arccsc} x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$\left[\frac{-\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\frac{d}{\mathrm{d}x} \operatorname{arccsc} x = \frac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$

Las funciones que más se emplean son las que tienen derivada positiva, por lo que solo incluimos las integrales indefinidas de ellas:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsen x + C;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x + C;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec} x + C.$$

Observación: la primera integral solo puede hacerse sobre intervalos contenidos en $(1, 1)$ y la última sobre intervalos dentro de $(-\infty, -1)$ o bien $(1, \infty)$.

Ejercicios 1.8.2 *La integral indefinida 2.* *Soluciones en la página 11*

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\displaystyle\int \frac{3x^2-4x+5}{2x^3}\,\mathrm{d}x$.
2. $\displaystyle\int (3\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos\theta + 5\sec^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
3. $\displaystyle\int (3\tan\theta - 4\sec\theta + 5)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.
4. $\displaystyle\int \frac{2\cot\theta - 5\csc\theta - 4\,\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
5. $\displaystyle\int \frac{5\tan\theta - 6\sec\theta - 3\cos\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
6. $\displaystyle\int \left(\frac{3}{\sqrt{1-u^2}} - \frac{2}{u\sqrt{u^2-1}}\right)\mathrm{d}u$.
7. $\displaystyle\int \left(10e^u - \frac{4}{1+u^2} - \frac{8}{u}\right)\mathrm{d}u$.

Calcular las siguientes integrales definidas:

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} (3\,\mathrm{sen}\,\theta - 4\cos\theta + 5\sec^2\theta)\,\mathrm{d}\theta$.
2. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (3\tan\theta - 4\sec\theta + 5)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.
3. $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{2\cot\theta - 5\csc\theta - 4\,\mathrm{sen}\,\theta}{\mathrm{sen}\,\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{5\tan\theta - 6\sec\theta - 3\cos\theta}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$.
5. $\displaystyle\int_0^1 \left(2e^u - \frac{3}{1+u^2} - \frac{4}{\sqrt{1-u^2}}\right)\mathrm{d}u$.
6. $\displaystyle\int_1^e \frac{3x^2-2x+4}{x}\,\mathrm{d}x$.
7. $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{3-2\sqrt{x^2-1}}{x\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$.
8. $\displaystyle\int_0^1 \left(2e^t - \frac{t^2+3}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t$.

Ejercicios 1.8.1 *La integral indefinida 1.* *Preguntas, página 5*

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $x^3 - 2x^2 + 5x + C$.
2. $-3x^{-1} + \frac{4}{3}x^{-2} + 5x + C$.
3. $\frac{5}{2}x^4 - \frac{8}{5}x^5 + x^6 + C$.
4. $20x^{3/2} - \frac{48}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{36}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$.
5. $12x^{\frac{5}{3}} + \frac{72}{13}x^{\frac{13}{6}} - \frac{96}{19}x^{\frac{19}{6}} + C$.
6. $\frac{15}{4}x^{\frac{1}{3}} + \frac{9}{10}x^{\frac{5}{6}} - \frac{6}{11}x^{\frac{11}{6}} + C$.
7. $25x + 5x^4 + \frac{4}{7}x^7 + C$.
8. $-8x + 12x^3 - \frac{54}{5}x^5 + \frac{27}{7}x^7 + C$.
9. $\frac{1}{5x^5} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{x} + x + C$.
10. $\frac{50}{3}x^3 + \frac{20}{3}x^6 + \frac{8}{9}x^9 + C$.
11. $-6x^2 + \frac{9}{2}x^4 + C$.
12. $\frac{1}{4x^4} - \frac{1}{x^3} + \frac{3}{2x^2} - \frac{1}{x} + C$.

Evaluar las siguientes integrales definidas:

1. $-\frac{16}{5}$.
2. $\frac{544}{35}$.
3. $\frac{214}{45}$.
4. $\frac{3\,084}{247}$.
5. -16.1978.

Ejercicios 1.8.2 *La integral indefinida 2.* *Preguntas, página 9*

Calcular las siguientes integrales indefinidas:

1. $\frac{3}{2}\ln x + \frac{2}{x} - \frac{5}{4x^2} + C$.
2. $-3\cos\theta - 4\operatorname{sen}\theta + 5\tan\theta + C$.
3. $-4\theta - 3\cos\theta + 5\operatorname{sen}\theta + C$.
4. $-4\theta + 5\cot\theta - 2\csc\theta + C$.
5. $-3\theta + 5\sec\theta - 6\tan\theta + C$.
6. $3\operatorname{arcsen} u - 2\operatorname{arcsec} u + C$.
7. $-4\arctan u + 10e^u - 8\ln u + C$.

Calcular las siguientes integrales definidas:

1. 3.0503.
2. 0.8338.
3. -6.1773.
4. -6.2851.
5. -5.2028.
6. 10.147.
7. 1.6631.
8. 0.86577.