CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

[1]

2.1 Introducción

En este capítulo veremos las técnicas más comunes para calcular integrales indefinidas y definidas de una amplia variedad de funciones.
Para esto comenzaremos presentando brevemente el concepto de diferencial de una función.

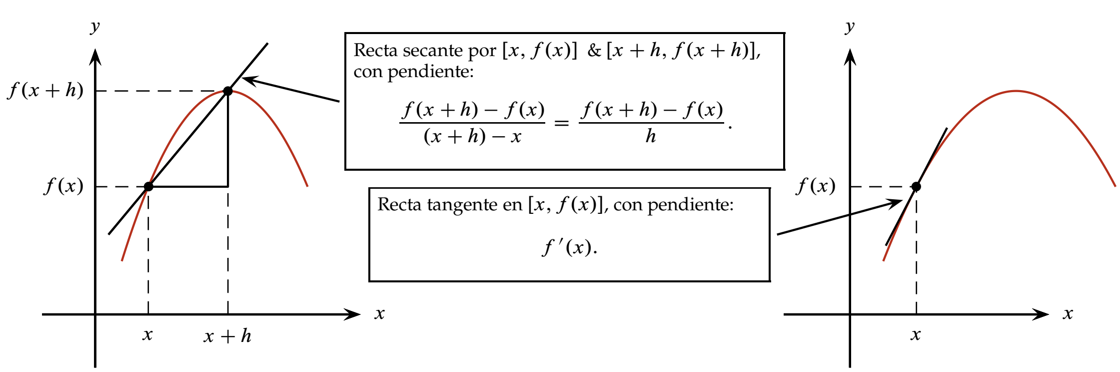
La diferencial de una función

En el libro *Cálculo diferencial* [**?**] se introdujo el concepto de la derivada de una función $y = f(x)$, definida como

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{2.1}$$

En la notación de Leibniz para derivadas se escribe, para una función $y = f(x)$,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x). \tag{2.2}$$



1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Por ser el límite del cociente (2.1), decimos que $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea de la función $f(x)$ en el punto x, lo cual significa que un pequeño cambio h en ese punto puede causar un pequeño cambio en $f(x)$ aproximadamente igual a $f'(x) \cdot h$.
Una notación comúnmente utilizada para referirse a estos cambios es la siguiente: Δx denota el cambio o incremento en x al moverse a un punto cercano; Δy denota el correspondiente cambio en y, es decir:

$$\Delta x = (x + h) - x = h \quad \& \quad \Delta y = f(x + h) - f(x). \tag{2.3}$$

Con esta notación podemos escribir

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.4}$$

y esta última fórmula se puede interpretar, para valores muy pequeños de Δx pero distintos de 0, como una aproximación.

$$f'(x) \approx \frac{\Delta y}{\Delta x} \tag{2.5}$$

o, equivalentemente,

$$\Delta y \approx f'(x)\Delta x. \tag{2.6}$$

Observe el parecido entre las fórmulas (2.2) y (2.5), aunque en la primera tenemos una igualdad y el cociente $\dfrac{dy}{dx}$ denota el límite cuando $\Delta x \to 0$ de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, mientras que en la fórmula (2.5) tenemos solo una aproximación.
La aproximación (2.6) se utiliza para hacer la estimación del cambio Δy en la variable y producido por un pequeño incremento Δx de la variable x. De momento solo usaremos la fórmula (2.6) para motivar la siguiente definición.

- **Definición.** Si $y = f(x)$ es una función con derivada $f'(x)$, se define la diferencial de $f(x)$, denotada por dy o bien $d f(x)$ mediante

  $$dy = d f(x) = f'(x)\, dx. \tag{2.7}$$

  donde denominamos a dx como la diferencial de la variable independiente x.

El cálculo de la diferencial de una función no presenta dificultad y se puede interpretar formalmente como la simple multiplicación de la derivada $f'(x)$ por la diferencial dx.

Ejemplo 2.1.1 *Calcular la diferencial de las siguientes funciones:*

1. $y = f(x) = x^2 - 3x + 5$.
2. $z = g(t) = \dfrac{t^2 + 2t}{t - 3}$.

▼ Formalmente sólo tenemos que calcular las derivadas y multiplicar por la correspondiente diferencial de la variable independiente:

1. $f'(x) = 2x - 3 \Rightarrow dy = f'(x)\, dx = (2x - 3)\, dx$.
2. $$g'(t) = \frac{(t-3)(2t+2) - (t^2+2t)1}{(t-3)^2} = \frac{2t^2 + 2t - 6t - 6 - t^2 - 2t}{(t-3)^2} = \frac{t^2 - 6t - 6}{(t-3)^2} \Rightarrow$$
   $$\Rightarrow dz = g'(t)\, dt = \left[\frac{t^2 - 6t - 6}{(t-3)^2}\right] dt.$$

□

- Por su definición $\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x$, todas las fórmulas para el cálculo de derivadas tienen sus fórmulas correspondientes en diferenciales, como las que enlistamos a continuación, donde f, g, u, v denotan funciones:

  1. $\mathrm{d}C = 0$ para C constante.
  2. $\mathrm{d}(x^n) = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$.
  3. $\mathrm{d}[Cf(x)] = C\,\mathrm{d}f(x)$.
  4. $\mathrm{d}(u \pm v) = \mathrm{d}u \pm \mathrm{d}v$.
  5. $\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$.
  6. $\mathrm{d}\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,\mathrm{d}u - u\,\mathrm{d}v}{v^2}$.
  7. $\mathrm{d}(u^n) = nu^{n-1}\,\mathrm{d}u$.
  8. $\mathrm{d}(f[g(x)]) = f'[g(x)]\,\mathrm{d}g(x) = f'[g(x)]g'(x)\,\mathrm{d}x$.

Ejemplo 2.1.2 *Si* $f(y) = \sqrt{y}$ & $g(x) = x^2 + 1$, *calcular* $\mathrm{d}(f[g(x)])$ & $\mathrm{d}(g[f(y)])$, *suponiendo que las composiciones de estas funciones están definidas y son diferenciables.*

▼ Observamos que

$$f'(y) = \frac{d}{dy}(y^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2}y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \quad \& \quad g'(x) = 2x,$$

así que

$$\mathrm{d}(f[g(x)]) = f'[g(x)]g'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{g(x)}}\cancel{2}x\,\mathrm{d}x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x.$$

Análogamente,

$$\mathrm{d}(g[f(y)]) = g'[f(y)]f'(y)\,\mathrm{d}y = [\cancel{2}f(y)]\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \sqrt{y}\frac{1}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}y.$$

Observe que se obtienen los mismos resultados si hacemos primero la composición y después derivamos para calcular la diferencial:

$$f[g(x)] = f(x^2+1) = \sqrt{x^2+1} \Rightarrow \frac{d}{dx}f[g(x)] = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+1} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mathrm{d}(f[g(x)]) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x;$$
$$g[f(y)] = g(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 + 1 = y + 1 \Rightarrow \mathrm{d}(g[f(y)]) = \mathrm{d}(y+1) = \mathrm{d}y.$$

□