CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

2.4 Integración de potencias de funciones trigonométricas

Trataremos ahora las técnicas de integración que permiten calcular integrales de funciones que son potencias de funciones trigonométricas, así como productos o cocientes de este tipo de funciones.
En el desarrollo de estas técnicas es relevante el uso de algunas identidades trigonométricas así como la aplicación de cambios de variable adecuados. Es importante también tener presente que si n es un número natural, entonces n, $2n-1$, $2n$, $2n+1$ y $2n+2$ son enteros positivos, con $2n$ y $2n+2$ pares y $2n-1$ y $2n+1$ impares.
Desarrollaremos estas técnicas de integración mostrando cómo resolver grandes familias de integrales.

2.4.1 Integrales $\int \operatorname{sen}^r x \cos^m x \, \mathrm{d}x$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ impar

- Cuando $m = 1$:

$$\int \operatorname{sen}^r x \cos^m x \, \mathrm{d}x = \int \operatorname{sen}^r \cos x \, \mathrm{d}x,$$

  que se calcula mediante un cambio de variable.

  Si $y = \operatorname{sen} x$, entonces $\mathrm{d}y = \cos x \, \mathrm{d}x$. Por lo tanto:

  1. Para $r \neq -1$

$$\int \operatorname{sen}^r x \cos x \, \mathrm{d}x = \int y^r \, \mathrm{d}y = \frac{y^{r+1}}{r+1} + C = \frac{1}{r+1}\operatorname{sen}^{r+1} x + C.$$

  2. Para $r = -1$

$$\int \operatorname{sen}^r x \cos x \, \mathrm{d}x = \int y^{-1} \, \mathrm{d}y = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} = \ln y + C = \ln(\operatorname{sen} x) + C.$$

canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

- Cuando $m > 1$, expresamos el impar m como $m = 2n + 1$, donde n es un número natural. En este caso:
$$\int \operatorname{sen}^r x \cos^m x \, dx = \int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n+1} x \, dx,$$
que calculamos de la manera siguiente.

  Primero separamos un factor $\cos x$ y lo colocamos junto a la diferencial dx.
$$\int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n} x \cos x \, dx.$$
  Luego consideramos que $\cos^{2n} x = (\cos^2 x)^n$ y utilizamos la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Resulta:
$$\int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n} x \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^r x (\cos^2 x)^n \cos x \, dx = \int \operatorname{sen}^r x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^n \cos x \, dx.$$
  Ahora aplicamos el mismo cambio de variable: $y = \operatorname{sen} x$ & $dy = \cos x \, dx$. Entonces:
$$\int \operatorname{sen}^r x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^n \cos x \, dx = \int y^r (1 - y^2)^n \, dy.$$
  Debido a que n es un número natural ($n = 1, 2, 3, \ldots$), podemos obtener el desarrollo de $(1 - y^2)^n$, para luego multiplicar cada uno de sus $(n + 1)$ términos por el factor y^r. Se obtiene así la integral de una suma algebraica de funciones, que es igual a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones. Esto es,
$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n} x \cos x \, dx &= \int \operatorname{sen}^r x (1 - \operatorname{sen}^2 x)^n \cos x \, dx = \int y^r (1 - y^2)^n \, dy = \\
&= \int y^r \left(1 - ny^2 + \frac{n(n-1)}{2} y^4 - \cdots + (-1)^n y^{2n}\right) dy = \\
&= \int \left(y^r - ny^{r+2} + \frac{n(n-1)}{2} y^{r+4} - \cdots + (-1)^n y^{r+2n}\right) dy = \\
&= \int y^r \, dy - n \int y^{r+2} \, dy + \frac{n(n-1)}{2} \int y^{r+4} \, dy - \cdots + (-1)^n \int y^{r+2n} \, dy = \\
&= \frac{y^{r+1}}{r+1} - n \frac{y^{r+3}}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{y^{r+5}}{r+5} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{r+2n+1}}{r+2n+1} + C.
\end{aligned}$$
  Donde $r + k \neq 0$, para $k = 1, 3, 5, \ldots, (2n + 1)$.

  Consideramos el cambio de variable realizado ($y = \operatorname{sen} x$) para así tener la solución de la integral:
$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^r x \cos^m x \, dx &= \int \operatorname{sen}^r x \cos^{2n+1} x \, dx = \\
&= \frac{\operatorname{sen}^{r+1} x}{r+1} - n \frac{\operatorname{sen}^{r+3} x}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{\operatorname{sen}^{r+5} x}{r+5} - \cdots + (-1)^n \frac{\operatorname{sen}^{r+2n+1} x}{r+2n+1} + C.
\end{aligned}$$

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.1 *Calcular la integral* $\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^5 x \, dx$.

▼ Primero separamos un factor $\cos x$ y lo colocamos junto a la diferencial dx.
$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^5 x \, dx = \int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^4 x \cos x \, dx.$$

Luego consideramos que $\cos^4 x = (\cos^2 x)^2$ y la identidad $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Resulta:

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^4 x \cos x \, dx = \int \sqrt{\operatorname{sen} x}(\cos^2 x)^2 \cos x \, dx = \int \sqrt{\operatorname{sen} x}(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $y = \operatorname{sen} x$ & $dy = \cos x \, dx$:

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}(1 - \operatorname{sen}^2 x)^2 \cos x \, dx = \int \sqrt{y}(1 - y^2)^2 \, dy.$$

Desarrollamos $(1 - y^2)^2$, luego multiplicamos por $\sqrt{y}$ para posteriormente integrar:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{y}(1 - y^2)^2 \, dy &= \int y^{1/2}(1 - 2y^2 + y^4) \, dy = \int (y^{1/2} - 2y^{5/2} + y^{9/2}) \, dy = \\ &= \int y^{1/2} \, dy - 2\int y^{5/2} \, dy + \int y^{9/2} \, dy = \frac{2}{3}y^{3/2} - 2\left(\frac{2}{7}\right) y^{7/2} + \frac{2}{11}y^{11/2} + C.\end{aligned}$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y = \operatorname{sen} x$) y concluimos:

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x}\cos^5 x \, dx = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} x - \frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/2} x + \frac{2}{11}\operatorname{sen}^{11/2} x + C.$$

□

Ahora veamos cómo proceder ante una integral definida.

Ejemplo 2.4.2 *Calcular la integral definida* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^5 x \, dx.$

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Por el ejemplo anterior sabemos que la integral indefinida está dada por

$$\int \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^5 x \, dx = \frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} x - \frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/2} x + \frac{2}{11}\operatorname{sen}^{11/2} x + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{sen} x} \cos^5 x \, dx &= \left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2} x - \frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/2} x + \frac{2}{11}\operatorname{sen}^{11/2} x\right]_0^{\pi/2} = \\ &= \left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}\frac{\pi}{2} - \frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/2}\frac{\pi}{2} + \frac{2}{11}\operatorname{sen}^{11/2}\frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{2}{3}\operatorname{sen}^{3/2}(0) - \frac{4}{7}\operatorname{sen}^{7/2}(0) + \frac{2}{11}\operatorname{sen}^{11/2}(0)\right] = \\ &= \left[\frac{2}{3}(1)^{3/2} - \frac{4}{7}(1)^{7/2} + \frac{2}{11}(1)^{11/2}\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^{3/2} - \frac{4}{7}(0)^{7/2} + \frac{2}{11}(0)^{11/2}\right] = \\ &= \frac{2}{3} - \frac{4}{7} + \frac{2}{11} - 0 = \frac{154 - 132 + 42}{231} = \frac{64}{231}.\end{aligned}$$

□

- Cuando $m > 1$ (impar) & $r = 0$, las integrales son del tipo

$$\int \operatorname{sen}^r x \cos^m x \, dx = \int \operatorname{sen}^0 x \cos^{2n+1} x \, dx = \int \cos^{2n+1} x \, dx.$$

Ejemplo 2.4.3 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \cos^7 2x \, dx.$

▼ En esta integral no aparece el factor seno, pero la función coseno tiene un exponente entero positivo impar; entonces, la integral pertenece a la familia que estamos tratando. Primero separamos un factor $\cos 2x$:

$$\int \cos^7 2x \, dx = \int \cos^6 2x \cos 2x \, dx.$$

Luego consideramos que $\cos^6 x = (\cos^2 2x)^3$ y la identidad $\cos^2 2x = 1 - \operatorname{sen}^2 2x$. Resulta:

$$\int \cos^7 2x \,\mathrm{d}x = \int \cos^6 2x \cos 2x \,\mathrm{d}x = \int (\cos^2 2x)^3 \cos 2x \,\mathrm{d}x = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)^3 \cos 2x \,\mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $y = \operatorname{sen} 2x$ & $\mathrm{d}y = 2\cos 2x \,\mathrm{d}x$. Entonces:

$$\int \cos^7 2x \,\mathrm{d}x = \int (\cos^2 2x)^3 \cos 2x \,\mathrm{d}x = \int (1 - \operatorname{sen}^2 2x)^3 \cos 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 - y^2)^3 \,\mathrm{d}y.$$

Desarrollamos $(1 - y^2)^3$ para luego integrar

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int (1 - y^2)^3 \,\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int (1 - 3y^2 + 3y^4 - y^6) \,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{1}{2}\left(y - y^3 + \frac{3}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7\right) + C = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{10}y^5 - \frac{1}{14}y^7 + C.\end{aligned}$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y = \operatorname{sen} 2x$) y concluimos:

$$\int \cos^7 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 2x + \frac{3}{10}\operatorname{sen}^5 2x - \frac{1}{14}\operatorname{sen}^7 2x + C.$$

□

Ejemplo 2.4.4 *Calcular la integral definida* $\displaystyle\int_0^{\pi/12} \cos^7 2x \,\mathrm{d}x$.

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Por el ejemplo anterior sabemos que la integral indefinida está dada por

$$\int \cos^7 2x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 2x + \frac{3}{10}\operatorname{sen}^5 2x - \frac{1}{14}\operatorname{sen}^7 2x + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/12} \cos^7 2x \,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3 2x + \frac{3}{10}\operatorname{sen}^5 2x - \frac{1}{14}\operatorname{sen}^7 2x\right]_0^{\pi/12} = \\ &= \left[\frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^3\frac{\pi}{6} + \frac{3}{10}\operatorname{sen}^5\frac{\pi}{6} - \frac{1}{14}\operatorname{sen}^7\frac{\pi}{6}\right] - \left[\frac{1}{2}(0) - \frac{1}{2}(0)^3 + \frac{3}{10}(0)^5 - \frac{1}{14}(0)^7\right] = \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{10}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{14}\left(\frac{1}{2}\right)^7 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^6 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \\ &= \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^4} + \frac{3}{5}\left(\frac{1}{2^6}\right) - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2^8}\right) = \frac{1}{2^8}\left[2^6 - 2^4 + \frac{3}{5}(2)^2 - \frac{1}{7}\right] = \frac{1}{2^8}\left[\frac{1\,759}{35}\right] = \frac{1\,759}{8\,960}.\end{aligned}$$

□

2.4.2 Integrales $\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \,\mathrm{d}x$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ impar

- Cuando $m = 1$:

$$\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \,\mathrm{d}x = \int \cos^r x \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x,$$

que se calcula mediante un cambio de variable.

Si $y = \cos x$, entonces $\mathrm{d}y = -\operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x$. Por lo tanto,

1. Para $r \neq -1$:

$$\int \cos^r x \ \operatorname{sen} x \ dx = -\int y^r \ dy = -\frac{y^{r+1}}{r+1} + C = -\frac{1}{r+1}\cos^{r+1} x + C.$$

2. Para $r = -1$:

$$\int \cos^r x \ \operatorname{sen} x \ dx = -\int y^{-1} \ dy = -\int \frac{dy}{y} = -\ln y + C = -\ln(\cos x) + C = \ln(\sec x) + C.$$

- Cuando $m > 1$, expresamos al impar m como $m = 2n + 1$, donde n es un número natural:

$$\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \ dx = \int \cos^r x \operatorname{sen}^{2n+1} x \ dx,$$

que calculamos de la siguiente manera.

Primero separamos un factor $\operatorname{sen} x$:

$$\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \ dx = \int \cos^r x \operatorname{sen}^{2n} x \ \operatorname{sen} x \ dx.$$

Luego consideramos que $\operatorname{sen}^{2n} x = (\operatorname{sen}^2 x)^n$ y utilizamos la identidad $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

$$\int \cos^r x \operatorname{sen}^{2n} x \ \operatorname{sen} x \ dx = \int \cos^r x (\operatorname{sen}^2 x)^n \ \operatorname{sen} x \ dx = \int \cos^r x (1 - \cos^2 x)^n \ \operatorname{sen} x \ dx.$$

Ahora aplicamos el mismo cambio de variable $y = \cos x$ & $dy = -\operatorname{sen} x \ dx$. Así:

$$\int \cos^r x (1 - \cos^2 x)^n \ \operatorname{sen} x \ dx = -\int y^r \ (1 - y^2)^n \ dy.$$

Donde se aprecia que, salvo el signo negativo, hemos llegado a lo obtenido en el caso 2.4.1. Procedemos entonces a desarrollar $(1 - y^2)^n$, para luego multiplicar cada término por y^r; obtenemos la integral de una suma algebraica de funciones, que igualamos a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones. Esto es,

$$\begin{aligned}
-\int y^r (1 - y^2)^n \ dy &= -\int y^r \left(1 - ny^2 + \frac{n(n-1)}{2} y^4 - \cdots + (-1)^n y^{2n}\right) dy = \\
&= -\int \left(y^r - ny^{r+2} + \frac{n(n-1)}{2} y^{r+4} - \cdots + (-1)^n y^{r+2n}\right) dy = \\
&= -\left(\int y^r \ dy - n\int y^{r+2} \ dy + \frac{n(n-1)}{2}\int y^{r+4} \ dy - \cdots + (-1)^n \int y^{r+2n} \ dy\right) = \\
&= -\left(\frac{y^{r+1}}{r+1} - n\frac{y^{r+3}}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{y^{r+5}}{r+5} - \cdots + (-1)^n \frac{y^{r+2n+1}}{r+2n+1}\right) + C.
\end{aligned}$$

Donde $r + k \neq 0$ para $k = 1, 3, 5, \cdots, (2n + 1)$.

Consideramos el cambio de variable realizado ($y = \cos x$) para así tener la solución de la integral. Esto es,

$$\begin{aligned}
\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \ dx &= \int \cos^r x \operatorname{sen}^{2n+1} x \ dx = \\
&= -\left(\frac{\cos^{r+1} x}{r+1} - n\frac{\cos^{r+3} x}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\cos^{r+5} x}{r+5} - \cdots + (-1)^n \frac{\cos^{r+2n+1} x}{r+2n+1}\right) + C.
\end{aligned}$$

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.5 *Calcular la integral* $\int \cos^4 kt \operatorname{sen}^3 kt \, dt$.

▼ Primero separamos un factor $\operatorname{sen} kt$:

$$\int \cos^4 kt \operatorname{sen}^3 kt \, dt = \int \cos^4 kt \operatorname{sen}^2 kt \, \operatorname{sen} kt \, dt.$$

Luego consideramos la identidad $\operatorname{sen}^2 kt = 1 - \cos^2 kt$.

$$\int \cos^4 kt \operatorname{sen}^3 kt \, dt = \int \cos^4 kt \operatorname{sen}^2 kt \, \operatorname{sen} kt \, dt = \int \cos^4 kt (1 - \cos^2 kt) \, \operatorname{sen} kt \, dt.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable: $y = \cos kt$ & $dy = -k \operatorname{sen} kt \, dt$. Entonces:

$$\int \cos^4 kt (1 - \cos^2 kt) \operatorname{sen} kt \, dt = -\frac{1}{k} \int y^4 (1 - y^2) \, dy = = -\frac{1}{k} \int (y^4 - y^6) \, dy = -\frac{1}{k} \left(\frac{1}{5} y^5 - \frac{1}{7} y^7 \right) + C.$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y = \cos kt$) y concluimos

$$\int \cos^4 kt \operatorname{sen}^3 kt \, dt = \frac{1}{7k} \cos^7 kt - \frac{1}{5k} \cos^5 kt + C.$$

□

Ejemplo 2.4.6 *Calcular la integral* $\int_0^{\pi/3} \cos^4 3t \operatorname{sen}^3 3t \, dt$.

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Si en el ejemplo anterior consideramos $k = 3$, entonces la integral indefinida ya está calculada y además está dada por:

$$\int \cos^4 3t \operatorname{sen}^3 3t \, dt = \frac{1}{21} \cos^7 3t - \frac{1}{15} \cos^5 3t + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/3} \cos^4 3t \operatorname{sen}^3 3t \, dt &= \left[\frac{1}{21} \cos^7 3t - \frac{1}{15} \cos^5 3t \right]_0^{\pi/3} = \\
&= \left[\frac{1}{21} \cos^7 \pi - \frac{1}{15} \cos^5 \pi \right] - \left[\frac{1}{21} \cos^7 (0) - \frac{1}{15} \cos^5 (0) \right] = \\
&= \left[\frac{1}{21} (-1)^7 - \frac{1}{15} (-1)^5 \right] - \left[\frac{1}{21} (1)^7 - \frac{1}{15} (1)^7 \right] = \\
&= -\frac{1}{21} + \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{15} = \frac{2}{15} - \frac{2}{21} = \frac{4}{105}.
\end{aligned}$$

□

- Cuando $m > 1$ (impar) & $r = 0$, se tienen integrales del tipo:

$$\int \cos^r x \operatorname{sen}^m x \, dx = \int \cos^0 x \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx = \int \operatorname{sen}^{2n+1} x \, dx.$$

Ejemplo 2.4.7 *Calcular la integral* $\int \operatorname{sen}^5 \frac{t}{2} \, dt$.

▼ En esta integral no aparece el factor coseno, pero la función seno tiene un exponente entero positivo impar; entonces, la integral pertenece a la familia que estamos tratando.

Primero separamos un factor $\operatorname{sen}\frac{t}{2}$ y lo colocamos junto a la diferencial $\mathrm{d}t$.

$$\int \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \int \operatorname{sen}^4\frac{t}{2}\,\operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

Luego consideramos que $\operatorname{sen}^4\frac{t}{2} = \left(\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\right)^2$ y la identidad $\operatorname{sen}^2\frac{t}{2} = 1 - \cos^2\frac{t}{2}$:

$$\int \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \int \operatorname{sen}^4\frac{t}{2}\,\operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \int \left(\operatorname{sen}^2\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = \int \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $y = \cos\frac{t}{2}$ & $\mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$. Entonces:

$$\begin{aligned}\int \left(1 - \cos^2\frac{t}{2}\right)^2 \operatorname{sen}\,\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t &= -2\int (1-y^2)^2\,\mathrm{d}y = -2\int (1 - 2y^2 + y^4)\,\mathrm{d}y = \\ &= -2\left(y - \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right) + C = -2y + \frac{4}{3}y^3 - \frac{2}{5}y^5 + C.\end{aligned}$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y = \cos\frac{t}{2}$) y concluimos:

$$\int \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -2\cos\frac{t}{2} + \frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2} - \frac{2}{5}\cos^5\frac{t}{2} + C.$$

□

Ejemplo 2.4.8 *Calcular la integral* $\displaystyle\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t$.

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Por el ejemplo anterior sabemos que la integral indefinida está dada por

$$\int \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t = -2\cos\frac{t}{2} + \frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2} - \frac{2}{5}\cos^5\frac{t}{2} + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned}\int_{\pi}^{2\pi} \operatorname{sen}^5\frac{t}{2}\,\mathrm{d}t &= \left[-2\cos\frac{t}{2} + \frac{4}{3}\cos^3\frac{t}{2} - \frac{2}{5}\cos^5\frac{t}{2}\right]_{\pi}^{2\pi} = \\ &= \left[-2\cos\pi + \frac{4}{3}\cos^3\pi - \frac{2}{5}\cos^5\pi\right] - \left[-2\cos\frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}\cos^3\frac{\pi}{2} - \frac{2}{5}\cos^5\frac{\pi}{2}\right] = \\ &= (-2)(-1) + \frac{4}{3}(-1)^3 - \frac{2}{5}(-1)^5 + 2(0) - \frac{4}{3}(0)^3 + \frac{2}{5}(0)^5 = 2 - \frac{4}{3} + \frac{2}{5} = \frac{16}{15}.\end{aligned}$$

□

2.4.3 Integrales $\int \operatorname{sen}^{2n}x\,\mathrm{d}x$, $\int \cos^{2m}x\,\mathrm{d}x$ & $\int \operatorname{sen}^{2n}x\cos^{2m}x\,\mathrm{d}x$; donde $n, m \in \mathbb{N}$

En estas familias de integrales, las funciones seno y coseno están afectadas por exponentes enteros positivos pares $(2m, 2n)$. Para calcular estas integrales se aplican las identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) \qquad \& \qquad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

La aplicación de estas identidades se realiza tantas veces como sea necesario, hasta obtener integrales casi inmediatas de la forma $\int \cos 2kx\,\mathrm{d}x$, con k natural; o bien integrales que pertenezcan a las familias anteriormente tratadas, en cuyo caso se aplicará el procedimiento correspondiente.

Ejemplo 2.4.9 *Calcular las integrales* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x\ \mathrm{d}x \quad \& \quad \int \cos^2 x\ \mathrm{d}x.$

▼ Para la primera integral, aplicaremos la identidad $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ y para la segunda, la identidad $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

$$\int \operatorname{sen}^2 x\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x - \int \cos 2x\ \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C;$$
$$\int \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x + \int \cos 2x\ \mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + C.$$

□

Ejemplo 2.4.10 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\ \mathrm{d}x.$

▼ Aplicamos a la vez las identidades $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ y $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2x)$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x\ \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\cdot\frac{1}{2}(1+\cos 2x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1-\cos^2 2x)\ \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{4}\int (\operatorname{sen}^2 2x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}[1-\cos 2(2x)]\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\ \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{8}\left(x - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x\right) + C = \frac{1}{8}x - \frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x + C.
\end{aligned}$$

Hemos aplicamos la identidad $\operatorname{sen}^2 2x = \dfrac{1}{2}[1-\cos(2\cdot 2x)] = \dfrac{1}{2}(1-\cos 4x)$. □

Ejemplo 2.4.11 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^4 2x\ \mathrm{d}x.$

▼ Aplicaremos primero la identidad $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2u)$ y luego $\cos^2 u = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2u)$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^4 2x\ \mathrm{d}x &= \int (\operatorname{sen}^2 2x)^2\ \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}[1-\cos(2\cdot 2x)]\right)^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int (1-\cos 4x)^2\ \mathrm{d}x = \\
&= \frac{1}{4}\int (1-2\cos 4x+\cos^2 4x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(x-(2)\frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x + \int \cos^2 4x\ \mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x + \int \frac{1}{2}[1+\cos(2\cdot 4x)]\,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{2}\int (1+\cos 8x)\ \mathrm{d}x\right) = \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{8}\left(x + \frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x\right) + C = \frac{3}{8}x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 4x + \frac{1}{64}\operatorname{sen} 8x + C.
\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4.12 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^4 2x\ \mathrm{d}x.$

▼ Aplicamos a la vez las identidades $\operatorname{sen}^2 u = \dfrac{1}{2}(1-\cos 2u)$ y $\cos^2 w = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2w)$.

$$\begin{aligned}
\int \operatorname{sen}^2 2x \cos^4 2x \, dx &= \int (\operatorname{sen}^2 2x)(\cos^2 2x)^2 \, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 4x)\frac{1}{4}(1+\cos 4x)^2 \, dx = \\
&= \frac{1}{8}\int (1-\cos 4x)(1+\cos 4x)(1+\cos 4x) \, dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 4x)(1+\cos 4x) \, dx = \\
&= \frac{1}{8}\int (\operatorname{sen}^2 4x)(1+\cos 4x) \, dx = \frac{1}{8}\left[\int \operatorname{sen}^2 4x \, dx + \int (\operatorname{sen} 4x)^2 \cos 4x \, dx\right] = \\
&= \frac{1}{8}\left[\int \frac{1}{2}(1-\cos 8x) \, dx + \frac{1}{4}\int (\operatorname{sen} 4x)^2 4\cos 4x \, dx\right] = \\
&= \frac{1}{16}\left[x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x\right] + \frac{1}{32}\frac{(\operatorname{sen} 4x)^3}{3} + C = \frac{1}{16}\left[x - \frac{1}{8}\operatorname{sen} 8x + \frac{1}{6}\operatorname{sen}^3 4x\right] + C.
\end{aligned}$$

□

2.4.4 Integrales $\int \tan^r x \sec^m x \, dx$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ par

- Cuando $m = 2$,
$$\int \tan^r x \sec^m x \, dx = \int \tan^r x \sec^2 x \, dx,$$
que se calcula mediante un cambio de variable. Si $y = \tan x$, entonces $dy = \sec^2 x \, dx$. Por lo tanto:

  1. Para $r \neq -1$, $\displaystyle\int \tan^r x \sec^2 x \, dx = \int y^r \, dy = \frac{y^{r+1}}{r+1} + C = \frac{1}{r+1}\tan^{r+1} x + C$.
  2. Para $r = -1$, $\displaystyle\int \tan^r x \sec^2 x \, dx = \int y^{-1} \, dy = \int \frac{dy}{y} = \ln y + C = \ln(\tan x) + C$.

- Cuando $m > 2$, expresamos el natural par m como $m = 2n + 2$, donde n es un número natural.
En este caso:
$$\int \tan^r x \sec^m x \, dx = \int \tan^r x \sec^{2n+2} x \, dx,$$
que calculamos de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\sec^2 x$ para escribirlo junto a la diferencial dx.
$$\int \tan^r x \sec^{2n+2} x \, dx = \int \tan^r x \sec^{2n} x \sec^2 x \, dx.$$
Como $\sec^{2n} x = (\sec^2 x)^n$, entonces utilizamos la identidad $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$. Así:
$$\int \tan^r x \sec^{2n} x \sec^2 x \, dx = \int \tan^r x \, (\sec^2 x)^n \sec^2 x \, dx = \int \tan^r x (1 + \tan^2 x)^n \sec^2 x \, dx.$$
Ahora aplicamos el mismo cambio de variable: $y = \tan x \Rightarrow dy = \sec^2 x \, dx$. Por lo tanto:
$$\int \tan^r x (1 + \tan^2 x)^n \sec^2 x \, dx = \int y^r (1 + y^2)^n \, dy.$$
Y debido a que n es un número natural ($n = 1, 2, 3, \ldots$), podemos obtener el desarrollo de $(1 + y^2)^n$, para luego multiplicar cada uno de sus $(n + 1)$ términos por el factor y^r. Se obtiene así la integral de una suma algebraica de funciones, que es igual a la suma algebraica de las integrales de dichas

funciones. Esto es,

$$\begin{aligned}\int y^r(1+y^2)^n \, \mathrm{d}y &= \int y^r\left(1+ny^2+\frac{n(n-1)}{2}y^4+\cdots+y^{2n}\right)\mathrm{d}y = \\ &= \int\left(y^r+ny^{r+2}+\frac{n(n-1)}{2}y^{r+4}+\cdots+y^{r+2n}\right)\mathrm{d}y = \\ &= \int y^r\,\mathrm{d}y+n\int y^{r+2}\,\mathrm{d}y+\frac{n(n-1)}{2}\int y^{r+4}\,\mathrm{d}y+\cdots+\int y^{r+2n}\,\mathrm{d}y = \\ &= \frac{y^{r+1}}{r+1}+n\frac{y^{r+3}}{r+3}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{y^{r+5}}{r+5}+\cdots+\frac{y^{r+2n+1}}{r+2n+1}+C,\end{aligned}$$

siempre y cuando $r+k\neq 0$, para $k=1,3,5,\ldots,(2n+1)$.

Recuperamos el cambio de variable realizado ($y=\tan x$), para obtener la solución de la integral:

$$\int \tan^r x\sec^m x\,\mathrm{d}x=\frac{\tan^{r+1}x}{r+1}+n\frac{\tan^{r+3}x}{r+3}+\frac{n(n-1)}{2}\frac{\tan^{r+5}x}{r+5}+\cdots+\frac{\tan^{r+2n+1}x}{r+2n+1}+C.$$

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.13 *Calcular la integral* $\int \sqrt{\tan x}\sec^6 x\,\mathrm{d}x$.

▼ Primero separamos un factor $\sec^2 x$ y lo escribimos junto a la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\int \sqrt{\tan x}\sec^6 x\,\mathrm{d}x=\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Luego consideramos que $\sec^4 x=(\sec^2 x)^2$ y la identidad $\sec^2 x=1+\tan^2 x$.

$$\int \sqrt{\tan x}\sec^4 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{\tan x}\,(\sec^2 x)^2\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{\tan x}(1+\tan^2 x)^2\sec^2 x\,\mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable: $y=\tan x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y=\sec^2 x\,\mathrm{d}x$:

$$\int\sqrt{\tan x}(1+\tan^2 x)^2\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\int\sqrt{y}(1+y^2)^2\,\mathrm{d}y.$$

Desarrollamos $(1+y^2)^2$ y luego multiplicamos por $\sqrt{y}$, para posteriormente integrar

$$\begin{aligned}\int\sqrt{y}\,(1+y^2)^2\,\mathrm{d}y&=\int y^{1/2}\,(1+2y^2+y^4)\,\mathrm{d}y=\int(y^{1/2}+2y^{5/2}+y^{9/2})\,\mathrm{d}y= \\ &=\int y^{1/2}\,\mathrm{d}y+2\int y^{5/2}\,\mathrm{d}y+\int y^{9/2}\,\mathrm{d}y=\frac{2}{3}y^{3/2}+2\left(\frac{2}{7}\right)y^{7/2}+\frac{2}{11}y^{11/2}+C.\end{aligned}$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y=\tan x$) y concluimos

$$\int\sqrt{\tan x}\sec^6 x\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\tan^{3/2}x+\frac{4}{7}\tan^{7/2}x+\frac{2}{11}\tan^{11/2}x+C.$$

□

Ahora veamos cómo proceder ante una integral definida.

Ejemplo 2.4.14 *Calcular la integral definida* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\sec^6 x \; \mathrm{d}x$.

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Por el ejemplo anterior sabemos que la integral indefinida es

$$\int \sqrt{\tan x}\,\sec^6 x \; \mathrm{d}x = \frac{2}{3}\tan^{3/2}x + \frac{4}{7}\tan^{7/2}x + \frac{2}{11}\tan^{11/2}x + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/4} \sqrt{\tan x}\,\sec^6 x \; \mathrm{d}x &= \left[\frac{2}{3}\tan^{3/2}x + \frac{4}{7}\tan^{7/2}x + \frac{2}{11}\tan^{11/2}x\right]_0^{\pi/4} = \\
&= \left[\frac{2}{3}\tan^{3/2}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{4}{7}\tan^{7/2}\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{11}\tan^{11/2}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] - \\
&\qquad - \left[\frac{2}{3}\tan^{3/2}(0) + \frac{4}{7}\tan^{7/2}(0) + \frac{2}{11}\tan^{11/2}(0)\right] = \\
&= \left[\frac{2}{3}(1)^{3/2} + \frac{4}{7}(1)^{7/2} + \frac{2}{11}(1)^{11/2}\right] - \left[\frac{2}{3}(0)^{3/2} + \frac{4}{7}(0)^{7/2} + \frac{2}{11}(0)^{11/2}\right] = \\
&= \frac{2}{3} + \frac{4}{7} + \frac{2}{11} - 0 = \frac{154 + 132 + 42}{231} = \frac{328}{231}.
\end{aligned}$$

□

- Cuando $m > 2$ (par) & $r = 0$, las integrales son del tipo

$$\int \tan^r x \sec^m x \; \mathrm{d}x = \int \tan^0 x \sec^{2n+2} x \; \mathrm{d}x = \int \sec^{2n+2} x \; \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 2.4.15 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \sec^8 2x \; \mathrm{d}x$.

▼ En esta integral no aparece el factor tangente, pero la función secante tiene un exponente entero positivo par; entonces, la integral pertenece a la familia que estamos tratando. Primero separamos un factor $\sec^2 2x$:

$$\int \sec^8 2x \; \mathrm{d}x = \int \sec^6 2x \sec^2 2x \; \mathrm{d}x.$$

Luego consideramos que $\sec^6 2x = (\sec^2 2x)^3$ y la identidad $\sec^2 2x = 1 + \tan^2 2x$. Por lo tanto:

$$\int \sec^8 2x \; \mathrm{d}x = \int \sec^6 2x \sec^2 2x \; \mathrm{d}x = \int (\sec^2 2x)^3 \sec^2 2x \; \mathrm{d}x = \int (1 + \tan^2 2x)^3 \sec^2 2x \; \mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $y = \tan 2x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y = 2\sec^2 2x \; \mathrm{d}x$. Entonces:

$$\int (1 + \tan^2 2x)^3 \sec^2 2x \; \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1 + y^2)^3 \; \mathrm{d}y.$$

Desarrollamos $(1 + y^2)^3$ para luego integrar

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int (1 + y^2)^3 \; \mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int (1 + 3y^2 + 3y^4 + y^6) \; \mathrm{d}y = \\
&= \frac{1}{2}\left(y + y^3 + \frac{3}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7\right) + C = \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^3 + \frac{3}{10}y^5 + \frac{1}{14}y^7 + C.
\end{aligned}$$

Finalmente, recuperamos el cambio de variable realizado ($y = \tan 2x$) y concluimos

$$\int \sec^8 2x \; \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{2}\tan^3 2x + \frac{3}{10}\tan^5 2x + \frac{1}{14}\tan^7 2x + C.$$

□

2.4.5 Integrales $\int \cot^r x \csc^m x \, \mathrm{d}x$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ par

- Cuando $m = 2$,

$$\int \cot^r x \csc^m x \, \mathrm{d}x = \int \cot^r x \csc^2 x \, \mathrm{d}x,$$

que se calcula mediante un cambio de variable. Si $y = \cot x$, entonces $\mathrm{d}y = -\csc^2 x \, \mathrm{d}x$. Por lo tanto:

1. Para $r \neq -1$, $\displaystyle\int \cot^r x \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\int y^r \, \mathrm{d}y = -\frac{y^{r+1}}{r+1} + C = -\frac{1}{r+1}\cot^{r+1} x + C.$
2. Para $r = -1$, $\displaystyle\int \cot^r x \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\int y^{-1} \, \mathrm{d}y = -\int \frac{\mathrm{d}y}{y} = -\ln y + C = -\ln(\cot x) + C.$

- Cuando $m > 2$, expresamos al natural par m como $m = 2n + 2$, donde n es un número natural. En este caso:

$$\int \cot^r x \csc^m x \, \mathrm{d}x = \int \cot^r x \csc^{2n+2} x \, \mathrm{d}x,$$

que calculamos de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\csc^2 x$:

$$\int \cot^r x \csc^{2n+2} x \, \mathrm{d}x = \int \cot^r x \csc^{2n} x \csc^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Luego consideramos que $\csc^{2n} x = (\csc^2 x)^n$ y utilizamos la identidad $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$.

$$\int \cot^r x \csc^{2n} x \csc^2 x \, \mathrm{d}x = \int \cot^r x \, (\csc^2 x)^n \csc^2 x \, \mathrm{d}x = \int \cot^r x (1 + \cot^2 x)^n \csc^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el mismo cambio de variable: $y = \cot x \;\Rightarrow\; \mathrm{d}y = -\csc^2 x \, \mathrm{d}x$. Entonces:

$$\int \cot^r x (1 + \cot^2 x)^n \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\int y^r (1 + y^2)^n \, \mathrm{d}y.$$

Y notamos que, salvo el signo negativo, hemos llegado a lo obtenido en el caso próximo anterior. Procedemos entonces a desarrollar $(1 + y^2)^n$, para luego multiplicar cada término por y^r; obtenemos la integral de una suma algebraica de funciones, que igualamos a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones. Esto es,

$$\begin{aligned}
-\int y^r (1 + y^2)^n \, \mathrm{d}y &= -\int y^r \left(1 + ny^2 + \frac{n(n-1)}{2} y^4 + \cdots + y^{2n}\right) \mathrm{d}y = \\
&= -\int \left(y^r + ny^{r+2} + \frac{n(n-1)}{2} y^{r+4} + \cdots + y^{r+2n}\right) \mathrm{d}y = \\
&= -\left(\int y^r \, \mathrm{d}y + n\int y^{r+2} \, \mathrm{d}y + \frac{n(n-1)}{2}\int y^{r+4} \, \mathrm{d}y + \cdots + \int y^{r+2n} \, \mathrm{d}y\right) = \\
&= -\left(\frac{y^{r+1}}{r+1} + n\frac{y^{r+3}}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{y^{r+5}}{r+5} + \cdots + \frac{y^{r+2n+1}}{r+2n+1}\right),
\end{aligned}$$

siempre y cuando $r + k \neq 0$ para $k = 1, 3, 5, \ldots, (2n+1)$. Siendo este el caso, consideramos el cambio de variable realizado ($y = \cot x$) para así tener la solución de la integral. Esto es,

$$\int \cot^r x \csc^m x \, \mathrm{d}x = -\left(\frac{\cot^{r+1} x}{r+1} + n\frac{\cot^{r+3} x}{r+3} + \frac{n(n-1)}{2}\frac{\cot^{r+5} x}{r+5} + \cdots + \frac{\cot^{r+2n+1} x}{r+2n+1}\right) + C.$$

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.16 *Calcular la integral* $\int \cot^3 x \csc^6 x \, \mathrm{d}x$.

▼ Calculamos esta integral de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\csc^2 x$ para escribirlo junto a la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\int \cot^3 x \csc^6 x \ \mathrm{d}x = \int \cot^3 x \csc^4 x \csc^2 x \ \mathrm{d}x.$$

Luego consideramos que $\csc^4 x = (\csc^2 x)^2$ y utilizamos la identidad $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$.

$$\int \cot^3 x \csc^4 x \csc^2 x \ \mathrm{d}x = \int \cot^3 x \,(\csc^2 x)^2 \csc^2 x \ \mathrm{d}x = \int \cot^3 x (1+\cot^2 x)^2 \csc^2 x \ \mathrm{d}x.$$

Aplicamos el cambio de variable: $y = \cot x \ \Rightarrow \ \mathrm{d}y = -\csc^2 x \ \mathrm{d}x$. Luego desarrollamos $(1+y^2)^2$ y multiplicamos por y^3, para posteriormente integrar. Entonces:

$$\int \cot^3 x (1+\cot^2 x)^2 \csc^2 x \ \mathrm{d}x = -\int y^3 (1+y^2)^2 \ \mathrm{d}y = -\int y^3 \left(1 + 2y^2 + y^4\right) \mathrm{d}y =$$

$$= -\int \left(y^3 + 2y^5 + y^7\right) \mathrm{d}y = -\left(\frac{y^4}{4} + 2\frac{y^6}{6} + \frac{y^8}{8}\right) + C.$$

Finalmente, recuperamos el cambio de variable realizado ($y = \cot x$) para así tener la solución de la integral. Esto es,

$$\int \cot^3 x \csc^6 x \ \mathrm{d}x = -\left(\frac{1}{4}\cot^4 x + \frac{1}{3}\cot^6 x + \frac{1}{8}\cot^8 x\right) + C.$$

□

- Cuando $m > 2$ & $r = 0$ se tienen integrandos donde no aparece el factor cotangente. Estas integrales son del tipo:

$$\int \cot^r x \csc^m x \ \mathrm{d}x = \int \cot^0 x \csc^{2n+2} x \ \mathrm{d}x = \int \csc^{2n+2} x \ \mathrm{d}x.$$

Ejemplo 2.4.17 *Calcular la integral* $\int \csc^6 3x \ \mathrm{d}x$.

▼ En esta integral no aparece el factor cotangente, pero la función cosecante tiene un exponente entero positivo par; entonces, la integral pertenece a la familia que estamos tratando. Primero separamos un factor $\csc^2 3x$, para escribirlo junto a la diferencial $\mathrm{d}x$. Esto es:

$$\int \csc^6 3x \ \mathrm{d}x = \int \csc^4 3x \csc^2 3x \ \mathrm{d}x.$$

Usamos $\csc^4 3x = (\csc^2 3x)^2$ y la identidad $\csc^2 3x = 1 + \cot^2 3x$:

$$\int \csc^6 x \ \mathrm{d}x = \int \csc^4 3x \csc^2 3x \ \mathrm{d}x = \int (\csc^2 3x)^2 \csc^2 3x \ \mathrm{d}x = \int (1+\cot^2 3x)^2 \csc^2 3x \ \mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable: $y = \cot 3x \ \Rightarrow \ \mathrm{d}y = -3\csc^2 3x \ \mathrm{d}x$. Entonces:

$$\int (1+\cot^2 3x)^2 \csc^2 3x \ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\int (1+y^2)^2 \ \mathrm{d}y.$$

Desarrollamos $(1+y^2)^2$ para luego integrar

$$-\frac{1}{3}\int (1+y^2)^2 \ \mathrm{d}y = -\frac{1}{3}\int (1+2y^2+y^4) \ \mathrm{d}y = -\frac{1}{3}\left(y + \frac{2}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5\right) + C =$$

$$= -\frac{1}{3}y - \frac{2}{9}y^3 - \frac{1}{15}y^5 + C.$$

Finalmente, consideramos el cambio de variable realizado ($y = \cot 3x$) y concluimos

$$\int \csc^6 3x \ \mathrm{d}x = -\frac{1}{3}\cot 3x - \frac{2}{9}\cot^3 3x - \frac{1}{15}\cot^5 3x + C.$$

□

2.4.6 Integrales $\int \sec^r x \tan^m x \, \mathrm{d}x$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ impar

- Cuando $m = 1$,

$$\int \sec^r x \tan^m x \, \mathrm{d}x = \int \sec^r x \tan x \, \mathrm{d}x,$$

que se calcula de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\sec x$, para escribirlo junto a $\tan x \, \mathrm{d}x$:

$$\int \sec^r x \tan x \, \mathrm{d}x = \int (\sec x)^r \tan x \, \mathrm{d}x = \int (\sec x)^{r-1} \sec x \tan x \, \mathrm{d}x.$$

Esto se calcula mediante un cambio de variable. Si $y = \sec x$, entonces $\mathrm{d}y = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x$. Por lo tanto:

1. Para $r \neq 0$, $\int \sec^r x \tan x \, \mathrm{d}x = \int y^{r-1} \, \mathrm{d}y = \frac{y^r}{r} + C = \frac{1}{r}\sec^r x + C$.
2. Para $r = 0$, $\int \sec^r x \tan x \, \mathrm{d}x = \int \sec^0 x \tan x \, \mathrm{d}x = \int \tan x \, \mathrm{d}x = \ln(\sec x) + C$.

- Cuando $m > 1$, expresamos al impar m como $m = 2n + 1$, donde n es un número natural.

En este caso:

$$\int \sec^r x \tan^m x \, \mathrm{d}x = \int \sec^r x \tan^{2n+1} x \, \mathrm{d}x,$$

que calculamos de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\sec x$ y un factor $\tan x$ para escribirlos junto a la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\int \sec^r x \tan^{2n+1} x \, \mathrm{d}x = \int \sec^{r-1} x \tan^{2n} x \sec x \tan x \, \mathrm{d}x.$$

Luego consideramos que $\tan^{2n} x = (\tan^2 x)^n$ y utilizamos la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

$$\int \sec^r x \tan^{2n+1} x \, \mathrm{d}x = \int \sec^{r-1} x \tan^{2n} x \sec x \tan x \, \mathrm{d}x =$$
$$= \int (\sec x)^{r-1} (\tan^2 x)^n \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \int (\sec x)^{r-1} (\sec^2 x - 1)^n \sec x \tan x \, \mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el mismo cambio de variable: $y = \sec x \Rightarrow \mathrm{d}y = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x$. Entonces:

$$\int (\sec x)^{r-1} (\sec^2 x - 1)^n \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \int y^{r-1} (y^2 - 1)^n \, \mathrm{d}y.$$

Y como en los casos anteriores, debido a que n es un número natural ($n = 1, 2, 3, ...$), podemos obtener el desarrollo de $(y^2 - 1)^n$, para luego multiplicar cada uno de sus $(n + 1)$ términos por el factor y^{r-1}. Se obtiene así la integral de una suma algebraica de funciones, que es igual a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones. Esto es, se procede como en los casos anteriormente tratados. Finalmente, se concluye considerando el cambio de variable realizado.

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.18 *Calcular la integral* $\int \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \, \mathrm{d}x$.

▼ En este caso:

$$\int \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \, \mathrm{d}x = \int \sec^{3/2} x \tan^5 x \, \mathrm{d}x,$$

la cual calculamos de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\sec x$ y un factor $\tan x$ para escribirlos junto a la diferencial $\mathrm{d}x$.

$$\int \sec^{3/2} x \tan^5 x \, \mathrm{d}x = \int \sec^{1/2} x \tan^4 x \sec x \tan x \, \mathrm{d}x.$$

Luego consideramos que $\tan^4 x = (\tan^2 x)^2$ y utilizamos la identidad $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

$$\int \sec^{3/2} x \tan^5 x \, \mathrm{d}x = \int \sec^{1/2} x \tan^4 x \sec x \tan x \, \mathrm{d}x =$$
$$= \int (\sec x)^{1/2} (\tan^2 x)^2 \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \int (\sec x)^{1/2} (\sec^2 x - 1)^2 \sec x \tan x \, \mathrm{d}x.$$

Ahora aplicamos el cambio de variable $y = \sec x \Rightarrow \mathrm{d}y = \sec x \tan x \, \mathrm{d}x$:

$$\int (\sec x)^{1/2} (\sec^2 x - 1)^2 \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \int y^{1/2} (y^2 - 1)^2 \, \mathrm{d}y.$$

Desarrollamos $(y^2-1)^2$, luego multiplicamos cada uno de sus tres términos por el factor $y^{1/2}$, obtenemos la integral de una suma algebraica de funciones e integramos.

$$\int y^{1/2} (y^2 - 1)^2 \, \mathrm{d}y = \int y^{1/2} (y^4 - 2y^2 + 1) \, \mathrm{d}y =$$
$$= \int (y^{9/2} - 2y^{5/2} + y^{1/2}) \, \mathrm{d}y = \frac{2}{11} y^{11/2} - (2)\frac{2}{7} y^{7/2} + \frac{2}{3} y^{3/2} + C.$$

Para concluir, consideramos el cambio de variable realizado $y = \sec x$.

$$\int \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{11} \sec^{11/2} x - \frac{4}{7} \sec^{7/2} x + \frac{2}{3} \sec^{3/2} x + C.$$

□

Otro ejemplo con una integral definida.

Ejemplo 2.4.19 *Calcular la integral definida* $\displaystyle\int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \, \mathrm{d}x$.

▼ Primero calculamos la integral indefinida y luego la definida. Por el ejemplo anterior sabemos que la integral indefinida es

$$\int \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \, \mathrm{d}x = \frac{2}{11} \sec^{11/2} x - \frac{4}{7} \sec^{7/2} x + \frac{2}{3} \sec^{3/2} x + C.$$

Ahora tomamos una de las primitivas de esta familia infinita y obtenemos el valor de la integral definida.

$$\int_0^{\pi/3} \sqrt{\sec^3 x} \tan^5 x \, \mathrm{d}x = \left[\frac{2}{11} \sec^{11/2} x - \frac{4}{7} \sec^{7/2} x + \frac{2}{3} \sec^{3/2} x \right]_0^{\pi/3} =$$
$$= \left[\frac{2}{11} (\sec \frac{\pi}{3})^{11/2} - \frac{4}{7} (\sec \frac{\pi}{3})^{7/2} + \frac{2}{3} (\sec \frac{\pi}{3})^{3/2} \right] - \left[\frac{2}{11} (\sec 0)^{11/2} - \frac{4}{7} (\sec 0)^{7/2} + \frac{2}{3} (\sec 0)^{3/2} \right] =$$
$$= \left[\frac{2}{11} (2)^{11/2} - \frac{4}{7} (2)^{7/2} + \frac{2}{3} (2)^{3/2} \right] - \left[\frac{2}{11} (1)^{11/2} - \frac{4}{7} (1)^{7/2} + \frac{2}{3} (1)^{3/2} \right] =$$
$$= \left[\frac{2}{11} (2^5 \sqrt{2}) - \frac{4}{7} (2^3 \sqrt{2}) + \frac{2}{3} (2\sqrt{2}) \right] - \left[\frac{2}{11} - \frac{4}{7} + \frac{2}{3} \right] = \left[\frac{64}{11} - \frac{32}{7} + \frac{4}{3} \right] \sqrt{2} - \left[\frac{2}{11} - \frac{4}{7} + \frac{2}{3} \right] =$$
$$= \frac{596}{231} \left(\sqrt{2} \right) - \frac{64}{231} = \frac{4}{231} \left(149\sqrt{2} - 16 \right).$$

□

2.4.7 Integrales $\int \csc^r x \cot^m x \, \mathrm{d}x$; donde $r \in \mathbb{Q}$, $m \in \mathbb{N}$ impar

Procedemos como en el caso anterior (2.4.6).

- Cuando $m = 1$:
$$\int \csc^r x \cot^m x \ \mathrm{d}x = \int \csc^r x \cot x \ \mathrm{d}x,$$
Primero separamos un factor $\csc x$ para escribirlo junto a $\cot x \ \mathrm{d}x$.
$$\int \csc^r x \ \cot x \ \mathrm{d}x = \int (\csc x)^r \ \cot x \ \mathrm{d}x = \int (\csc x)^{r-1} \ \csc x \ \cot x \ \mathrm{d}x,$$
Si $y = \csc x$, entonces $\mathrm{d}y = -\csc x \ \cot x \ \mathrm{d}x$. Por lo tanto:
  1. Para $r \neq 0$, $\displaystyle\int \csc^r x \ \cot x \ \ \mathrm{d}x = -\int y^{r-1} \ \mathrm{d}y = -\frac{y^r}{r} + C = -\frac{1}{r}\csc^r x + C.$
  2. Para $r = 0$, $\displaystyle\int \csc^r x \ \cot x \ \mathrm{d}x = \int \csc^0 x \cot x \, \mathrm{d}x = \int \cot x \, \mathrm{d}x = \ln(\operatorname{sen} x) + C.$
- Cuando $m > 1$, expresamos el impar m como $m = 2n + 1$, donde n es un número natural.
En este caso:
$$\int \csc^r x \cot^m x \ \mathrm{d}x = \int \csc^r x \cot^{2n+1} x \ \ \mathrm{d}x,$$
la cual calculamos de la siguiente manera. Primero separamos un factor $\csc x$ y un factor $\cot x$ para escribirlos junto a la diferencial $\mathrm{d}x$.
$$\int \csc^r x \cot^{2n+1} x \ \mathrm{d}x = \int \csc^{r-1} x \cot^{2n} x \ \csc x \ \cot x \ \mathrm{d}x.$$
Luego consideramos que $\cot^{2n} x = (\cot^2 x)^n$ y utilizamos la identidad $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$.
$$\int \csc^r x \cot^{2n+1} x \ \mathrm{d}x = \int \csc^{r-1} x \cot^{2n} x \ \csc x \ \cot x \ \mathrm{d}x = \int (\csc x)^{r-1} \ (\cot^2 x)^n \ \csc x \ \cot x \ \mathrm{d}x =$$
$$= \int (\csc x)^{r-1} \ (\csc^2 x - 1)^n \ \csc x \ \cot x \ \mathrm{d}x.$$
Ahora aplicamos el mismo cambio de variable $y = \csc x \ \Rightarrow \ \mathrm{d}y = -\csc x \ \cot x \ \mathrm{d}x$:
$$\int (\csc x)^{r-1} (\csc^2 x - 1)^n \csc x \ \cot x \ \mathrm{d}x = -\int y^{r-1} (y^2 - 1)^n \ \mathrm{d}y.$$
Y como en los casos anteriores, podemos obtener el desarrollo de $(y^2 - 1)^n$, para luego multiplicar cada uno de sus $(n + 1)$ términos por el factor y^{r-1}. Se obtiene así la integral de una suma algebraica de funciones, que es igual a la suma algebraica de las integrales de dichas funciones. Finalmente, se concluye considerando el cambio de variable realizado.

Veamos un primer ejemplo de este tipo de integrales.

Ejemplo 2.4.20 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\cot^3 2x \, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{\csc 2x}}$.

▼ En este caso,
$$\int \frac{\cot^3 2x}{\sqrt[3]{\csc 2x}} \, \mathrm{d}x = \int (\csc 2x)^{-\frac{1}{3}} \cot^3 2x \, \mathrm{d}x.$$
Aplicamos el procedimiento mencionado: primero separando factores $(\csc 2x)$ y $(\cot 2x)$, para luego utilizar la identidad $\cot^2 2x = \csc^2 2x - 1$.
$$\int (\csc 2x)^{-\frac{1}{3}} \cot^3 2x \, \mathrm{d}x = \int (\csc 2x)^{-\frac{4}{3}} (\csc 2x)^1 \left(\cot^2 2x\right) (\cot 2x) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \int (\csc 2x)^{-\frac{4}{3}} \left(\cot^2 2x\right) (\csc 2x \cdot \cot 2x) \, \mathrm{d}x =$$
$$= \int (\csc 2x)^{-\frac{4}{3}} \left(\csc^2 2x - 1\right) (\csc 2x \cdot \cot 2x) \, \mathrm{d}x.$$

Si $y = \csc 2x$, entonces $\mathrm{d}y = -2\csc 2x \cdot \cot 2x \,\mathrm{d}x$. Además,

$$\int (\csc 2x)^{-\frac{4}{3}} \left(\csc^2 2x - 1\right)(\csc 2x \cdot \cot 2x)\,\mathrm{d}x = \int y^{-\frac{4}{3}}\left(y^2-1\right)\left(-\frac{1}{2}\,\mathrm{d}y\right) = -\frac{1}{2}\int\left(y^{\frac{2}{3}} - y^{-\frac{4}{3}}\right)\mathrm{d}y$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}} - (-3)y^{-\frac{1}{3}}\right] + C = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{5}y^{\frac{5}{3}} + \frac{3}{y^{\frac{1}{3}}}\right] + C.$$

Pero $y = \csc 2x$. Por lo tanto,

$$\int \frac{\cot^3 2x}{\sqrt[3]{\csc 2x}}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{5}(\csc 2x)^{\frac{5}{3}} + \frac{1}{(\csc 2x)^{\frac{1}{3}}}\right] + C = -\frac{3}{2}\left[\frac{1}{5}\sqrt[3]{\csc^5 2x} + \frac{1}{\sqrt[3]{\csc 2x}}\right] + C.$$

□

2.4.8 Integrales $\int \operatorname{sen} mx \cdot \operatorname{sen} px\,\mathrm{d}x$, $\int \operatorname{sen} mx \cdot \cos px\,\mathrm{d}x$, $\int \cos mx \cdot \cos px\,\mathrm{d}x$; $(m \neq p)$

Estas familias de integrales difieren de las anteriormente estudiadas, pues los argumentos (mx & px) de las funciones seno y coseno son diferentes ($mx \neq px$).

Para calcular estas familias de integrales, utilizaremos identidades trigonométricas que se obtienen, a su vez, de las identidades para $\operatorname{sen}(\alpha+\theta)$, $\operatorname{sen}(\alpha-\theta)$, $\cos(\alpha+\theta)$, $\cos(\alpha-\theta)$.

1. Como

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\alpha \quad \& \quad \operatorname{sen}(\alpha-\theta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta - \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\alpha,$$

   entonces, al sumar estas identidades se obtiene:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\theta) + \operatorname{sen}(\alpha-\theta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\theta,$$

   de donde,

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\theta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\theta) + \operatorname{sen}(\alpha-\theta)\right].$$

2. Como

$$\cos(\alpha-\theta) = \cos\alpha\cdot\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta \quad \& \quad \cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cdot\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta,$$

   al sumar estas identidades se obtiene:

$$\cos(\alpha-\theta) + \cos(\alpha+\theta) = 2\cos\alpha\cdot\cos\theta,$$

   de donde,

$$\cos\alpha\cdot\cos\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\theta) + \cos(\alpha+\theta)\right].$$

3. Como

$$\cos(\alpha-\theta) = \cos\alpha\cdot\cos\theta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta \quad \& \quad \cos(\alpha+\theta) = \cos\alpha\cdot\cos\theta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta,$$

   al restar la segunda identidad de la primera se obtiene:

$$\cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta) = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta,$$

   de donde,

$$\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta)\right].$$

Resumiendo, tenemos las identidades trigonométricas

1. $\operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\theta) + \operatorname{sen}(\alpha-\theta)\right]$;

2. $\cos\alpha \cdot \cos\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\theta) + \cos(\alpha+\theta)\right]$;

3. $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\theta) - \cos(\alpha+\theta)\right]$.

También debemos tener presente las identidades

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta \quad \& \quad \cos(-\theta) = \cos\theta.$$

Ejemplo 2.4.21 *Calcular la integral* $\int \operatorname{sen} 5x \cos 2x \, dx$.

▼ Aplicamos la primera identidad.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 5x \cos 2x \, dx &= \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(5x+2x) + \operatorname{sen}(5x-2x)\right] dx = \frac{1}{2}\int \left[\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen} 3x\right] dx = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}(-\cos 7x) + \frac{1}{3}(-\cos 3x)\right] + C = \\ &= -\frac{1}{14}\cos 7x - \frac{1}{6}\cos 3x + C.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4.22 *Calcular la integral* $\int \operatorname{sen} 2x \cos 5x \, dx$.

▼ Aplicamos la primera identidad.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 2x \cos 5x \, dx &= \int \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(2x+5x) + \operatorname{sen}(2x-5x)\right] dx = \frac{1}{2}\int \left[\operatorname{sen} 7x + \operatorname{sen}(-3x)\right] dx = \\ &= \frac{1}{2}\int \left[\operatorname{sen} 7x - \operatorname{sen} 3x\right] dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{7}(-\cos 7x) - \frac{1}{3}(-\cos 3x)\right] + C = \\ &= -\frac{1}{14}\cos 7x + \frac{1}{6}\cos 3x + C.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4.23 *Calcular la integral* $\int \operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} 5x \, dx$.

▼ Aplicamos la tercera identidad.

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} 8x \operatorname{sen} 5x \, dx &= \int \frac{1}{2}\left[\cos(8x-5x) - \cos(8x+5x)\right] dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos 3x - \cos 13x\right] dx = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(\operatorname{sen} 3x) - \frac{1}{13}(\operatorname{sen} 13x)\right] + C = \frac{1}{6}\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{26}\operatorname{sen} 13x + C.\end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.4.24 *Calcular la integral* $\int \cos 5x \cos 7x \, dx$.

▼ Aplicamos la segunda identidad.

$$\int \cos 5x \cos 7x \, \mathrm{d}x = \int \frac{1}{2}\left[\cos(5x-7x)+\cos(5x+7x)\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left[\cos(-2x)+\cos(12x)\right]\mathrm{d}x =$$
$$= \frac{1}{2}\int\left[\cos 2x + \cos 12x\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sen} 2x)+\frac{1}{12}(\operatorname{sen} 12x)\right]+C =$$
$$= \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{24}\operatorname{sen} 12x + C.$$

□

Ejercicios 2.4.1 *Integración de potencias de funciones trigonométricas.* *Soluciones en la página 20*
Aplicar las técnicas de integración de potencias trigonométricas para calcular las siguientes integrales indefinidas.

1. $\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x$.
2. $\int \cos^3 2y \, \mathrm{d}y$.
3. $\int \tan^3 y \, \mathrm{d}y$.
4. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^5 x \, \mathrm{d}x$.
5. $\int \cos^5 2y \, \mathrm{d}y$.
6. $\int \tan^5 y \, \mathrm{d}y$.
7. $\int \operatorname{sen}^3 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x$.
8. $\int \operatorname{sen}^3 2y \, \mathrm{d}y$.
9. $\int \cot^3 y \, \mathrm{d}y$.
10. $\int \operatorname{sen}^5 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$.
11. $\int \operatorname{sen}^5 2y \, \mathrm{d}y$.
12. $\int \cot^5 y \, \mathrm{d}y$.
13. $\int \cos^2 3y \, \mathrm{d}y$.
14. $\int \operatorname{sen}^2 2y \, \mathrm{d}y$.
15. $\int \operatorname{sen}^4 x \cos^4 x \, \mathrm{d}x$.
16. $\int \cos^4 y \, \mathrm{d}y$.
17. $\int \operatorname{sen}^4 y \, \mathrm{d}y$.
18. $\int \operatorname{sen}^4 \theta \cos^2 \theta \, \mathrm{d}\theta$.
19. $\int \tan^2 x \sec^4 x \, \mathrm{d}x$.
20. $\int \tan^2 3x \, \mathrm{d}x$.
21. $\int \sec^4 3x \, \mathrm{d}x$.
22. $\int \tan^4 x \sec^6 x \, \mathrm{d}x$.
23. $\int \tan^4 3x \, \mathrm{d}x$.
24. $\int \sec^6 2x \, \mathrm{d}x$.
25. $\int \cot^2 x \csc^4 x \, \mathrm{d}x$.
26. $\int \cot^2 4x \, \mathrm{d}x$.
27. $\int \csc^4 3x \, \mathrm{d}x$.
28. $\int \tan^3 \theta \sec^3 \theta \, \mathrm{d}\theta$.
29. $\int \tan^5 \theta \sec^5 \theta \, \mathrm{d}\theta$.
30. $\int \cot^3 \theta \csc^5 \theta \, \mathrm{d}\theta$.
31. $\int \operatorname{sen} 5x \cos 3x \, \mathrm{d}x$.
32. $\int \operatorname{sen} 4x \operatorname{sen} 2x \, \mathrm{d}x$.
33. $\int \cos 3x \cos 2x \, \mathrm{d}x$.
34. $\int \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x \, \mathrm{d}x$.
35. $\int \cos x \cos 4x \, \mathrm{d}x$.
36. $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x \, \mathrm{d}x$.

Ejercicios 2.4.1 *Integración de potencias de funciones trigonométricas.* *Preguntas: página 19*

1. $\frac{1}{3}\text{sen}^3 x - \frac{1}{5}\text{sen}^5 x + C.$
2. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2y - \frac{1}{6}\text{sen}^3 2y + C.$
3. $\ln(\cos y) + \frac{1}{2}\sec^2 y + C.$
4. $\frac{1}{5}\text{sen}^5 x - \frac{2}{7}\text{sen}^7 x + \frac{1}{9}\text{sen}^9 x + C.$
5. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,2y - \frac{1}{3}\text{sen}^3 2y + \frac{1}{10}\text{sen}^5 2y + C.$
6. $\frac{1}{4}\sec^4 y - \sec^2 y + \ln(\sec y) + C.$
7. $\frac{1}{7}\cos^7 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + C.$
8. $\frac{1}{6}\cos^3 2y - \frac{1}{2}\cos 2y + C.$
9. $-\frac{1}{2}\csc^2 y + \ln(\csc y) + C.$
10. $-\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{2}{5}\cos^5 x - \frac{1}{7}\cos^7 x + C.$
11. $-\frac{1}{2}\cos 2y + \frac{1}{3}\cos^3 2y - \frac{1}{10}\cos^5 2y + C.$
12. $-\frac{1}{4}\csc^4 y + \csc^2 y - \ln(\csc y) + C.$
13. $\frac{1}{2}y + \frac{1}{12}\,\text{sen}\,6y + C.$
14. $\frac{1}{2}y - \frac{1}{8}\,\text{sen}\,4y + C.$
15. $\frac{1}{128}\left[3x - \text{sen}\,4x + \frac{1}{8}\,\text{sen}\,8x\right] + C.$
16. $\frac{3}{8}y + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2y + \frac{1}{32}\,\text{sen}\,4y + C.$
17. $\frac{3}{8}y - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2y + \frac{1}{32}\,\text{sen}\,4y + C.$
18. $\frac{1}{16}\left[\theta - \frac{1}{4}\,\text{sen}\,4\theta - \frac{1}{3}\text{sen}^3 2\theta\right] + C.$
19. $\frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x + C.$
20. $\frac{1}{3}\tan 3x - x + C.$
21. $\frac{1}{3}\tan 3x + \frac{1}{9}\tan^3 3x + C.$
22. $\frac{1}{5}\tan^5 x + \frac{2}{7}\tan^7 x + \frac{1}{9}\tan^9 x + C.$
23. $\frac{1}{9}\tan^3 3x - \frac{1}{3}\tan 3x + x + C.$
24. $\frac{1}{2}\tan 2x + \frac{1}{3}\tan^3 2x + \frac{1}{10}\tan^5 2x + C.$
25. $-\frac{1}{3}\cot^3 x - \frac{1}{15}\cot^5 x + C.$
26. $-\frac{1}{4}\cot 4x - x + C.$
27. $-\frac{1}{3}\cot 3x - \frac{1}{9}\cot^3 3x + C.$
28. $\frac{1}{5}\sec^5\theta - \frac{1}{3}\sec^3\theta + C.$
29. $\frac{1}{9}\sec^9\theta - \frac{2}{7}\sec^7\theta + \frac{1}{5}\sec^5\theta + C.$
30. $\frac{1}{5}\csc^5\theta - \frac{1}{7}\csc^7\theta + C.$
31. $-\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}cos2x + C.$
32. $\frac{1}{4}\,\text{sen}\,2x - \frac{1}{12}\,\text{sen}\,6x + C.$
33. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,x + \frac{1}{10}\,\text{sen}\,5x + C.$
34. $\frac{1}{2}\,\text{sen}\,x - \frac{1}{10}\,\text{sen}\,5x + C.$
35. $\frac{1}{6}\,\text{sen}\,3x + \frac{1}{10}\,\text{sen}\,5x + C.$
36. $\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{10}\cos 5x + C.$