CAPÍTULO

2

Métodos de Integración

2.5 Integración por sustitución trigonométrica

A continuación veremos una técnica de integración, la cual se basa en utilizar funciones trigonométricas para aplicar cambios de variable que tendrán como objetivo eliminar radicales de las formas $\sqrt{a^2 - x^2}$, $\sqrt{a^2 + x^2}$ & $\sqrt{x^2 - a^2}$, donde a es una constante positiva.

Consideremos aquí la notación siguiente: si f es una función con variable independiente x y además contiene al menos un radical como los siguientes:

- $\sqrt{a^2 - x^2}$, entonces f será denotada por $f(x, \sqrt{a^2 - x^2})$.
- $\sqrt{a^2 + x^2}$, entonces f será denotada por $f(x, \sqrt{a^2 + x^2})$.
- $\sqrt{x^2 - a^2}$, entonces f será denotada por $f(x, \sqrt{x^2 - a^2})$.

2.5.1 Integrales $\int f(x, \sqrt{a^2 - x^2})\,\mathrm{d}x$

Nuestro primer objetivo es eliminar el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$. Si usamos el cambio de variable

$$x = a \operatorname{sen}\theta,$$

obtenemos:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{a^2\cos^2\theta} = a\cos\theta.$$

El cambio de variable $x = a \operatorname{sen}\theta$ permite eliminar el radical $\sqrt{a^2 - x^2}$ convirtiéndolo en $\sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta$.

Además, si $x = a \operatorname{sen}\theta$, entonces $\mathrm{d}x = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$.

1. canek.azc.uam.mx: 13/ 1/ 2017

Por lo tanto, al aplicar este cambio de variable obtenemos:

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a \operatorname{sen}\theta, a\cos\theta) a\cos\theta \, \mathrm{d}\theta.$$

que es una integral donde el integrando esta formado con las funciones trigonométricas $\operatorname{sen}\theta$ & $\cos\theta$.

Al calcular esta última integral tendremos como resultado una función $G(\theta)$ en términos de funciones trigonométricas. Es decir,

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a \operatorname{sen}\theta, a\cos\theta) a\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = G(\theta) + C.$$

Debido a que en la integral original el integrando es una función de x, el resultado debe ser expresado mediante una función $H(x)$; esto es,

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a \operatorname{sen}\theta, a\cos\theta) a\cos\theta \, \mathrm{d}\theta = G(\theta) + C = H(x) + C.$$

Ahora bien, ¿cómo pasar de $G(\theta)$ a $H(x)$?
Como en $G(\theta)$ se tienen funciones trigonométricas, para pasar de $G(\theta)$ a $H(x)$ debemos considerar:

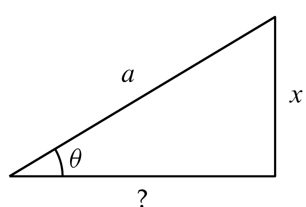
$$x = a \operatorname{sen}\theta \;\Rightarrow\; \operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a} \quad \& \quad \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos\theta \;\Rightarrow\; \cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a};$$

además,

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a} \;\Rightarrow\; \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right).$$

Se puede utilizar un triángulo rectángulo auxiliar, generado de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$



Se aplica el teorema de Pitágoras para determinar el cateto adyacente a θ:

$$? = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

- Observación

  Es importante observar que para calcular integrales de la forma $\int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right) \mathrm{d}x$, también puede ser aplicado el cambio de variable:

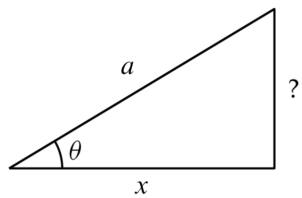
  $$x = a\cos\theta.$$

  En este caso:

  $$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2\cos^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - \cos^2\theta)} = \sqrt{a^2\operatorname{sen}^2\theta} = a \operatorname{sen}\theta.$$

  Además $\mathrm{d}x = -a \operatorname{sen}\theta \, \mathrm{d}\theta$. El procedimiento es análogo al que se expuso para $x = a \operatorname{sen}\theta$.
  Aquí el triángulo rectángulo auxiliar, se genera de la forma siguiente:

  $$\cos\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$



Se aplica el teorema de Pitágoras para determinar el cateto adyacente a θ:

$$? = \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Ejemplo 2.5.1 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

▼ Debido a que $\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2^2 - x^2}$, se propone $x = 2\operatorname{sen}\theta$.

Si $x = 2\operatorname{sen}\theta$, entonces $dx = 2\cos\theta\,d\theta$ y además

$$\sqrt{4-x^2} = \sqrt{2^2 - 2^2\operatorname{sen}^2\theta} = \sqrt{2^2(1-\operatorname{sen}^2\theta)} = \sqrt{2^2\cos^2\theta} = 2\cos\theta.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{2^2\operatorname{sen}^2\theta}{2\cos\theta}(2\cos\theta)\,d\theta = 2^2\int \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = 4\int \frac{1}{2}(1-\cos 2\theta)\,d\theta =$$
$$= 2\left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2\theta\right] + C = 2\left[\theta - \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta)\right] + C = 2[\theta - \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta] + C.$$

Ahora bien, para expresar este resultado como función de x debemos considerar que:

$$x = 2\operatorname{sen}\theta \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = \frac{x}{2} \quad \& \quad \theta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right); \quad \text{además,}$$
$$\sqrt{4-x^2} = 2\cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{4-x^2}}{2}.$$

Esto es,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2[\theta - \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta] + C = 2\left[\operatorname{arcsen}\frac{x}{2} - \left(\frac{x}{2}\right)\frac{\sqrt{4-x^2}}{2}\right] + C =$$
$$= 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + C.$$

□

Ejemplo 2.5.2 *Calcular la integral* $\displaystyle\int x^3\sqrt{1-x^2}\,dx$.

▼ Tomando en cuenta la observación hecha en la teoría expuesta, podemos optar por el cambio de variable

$$x = a\cos\theta = \cos\theta.$$

Entonces

$$dx = -\operatorname{sen}\theta\,d\theta \quad \text{y además} \quad \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \sqrt{\operatorname{sen}^2\theta} = \operatorname{sen}\theta.$$

Luego,

$$\int x^3\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int (\cos^3\theta)(\operatorname{sen}\theta)(-\operatorname{sen}\theta)\,\mathrm{d}\theta = -\int \cos^3\theta \operatorname{sen}^2\theta\,\mathrm{d}\theta = -\int \operatorname{sen}^2\theta\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= -\int \operatorname{sen}^2\theta\left[\cos^2\theta\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -\int \operatorname{sen}^2\theta\left[1-\operatorname{sen}^2\theta\right]\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = -\int y^2\left(1-y^2\right)\mathrm{d}y =$$

$\boxed{\text{Donde } y = \operatorname{sen}\theta \ \& \ \mathrm{d}y = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta.}$

$$= \int y^2\left(y^2-1\right)\mathrm{d}y = \int\left(y^4-y^2\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{3}y^3 + C =$$
$$= \frac{1}{5}(\operatorname{sen}\theta)^5 - \frac{1}{3}(\operatorname{sen}\theta)^3 + C = \frac{1}{5}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^5 - \frac{1}{3}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3 + C =$$

$\boxed{\text{Ya que } \sqrt{1-x^2} = \operatorname{sen}\theta.}$

$$= \left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\left[\frac{(1-x^2)}{5} - \frac{1}{3}\right] + C = \frac{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}{15}\left[3(1-x^2)-5\right] + C =$$
$$= \frac{1}{15}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3\left(-2-3x^2\right) + C = -\frac{1}{15}\left(\sqrt{(1-x^2)^3}\right)\left(3x^2+2\right) + C.$$

□

2.5.2 Integrales $\int f\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)\mathrm{d}x$

Para lograr el objetivo de eliminar al radical $\sqrt{a^2+x^2}$, convenimos en utilizar el cambio de variable

$$x = a\tan\theta.$$

Entonces:

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)} = \sqrt{a^2\sec^2\theta} = a\sec\theta.$$

El cambio de variable $x = a\tan\theta$ permite eliminar al radical $\sqrt{a^2+x^2}$ convirtiéndolo en:

$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec\theta.$$

Además,

$$x = a\tan\theta \ \Rightarrow\ \mathrm{d}x = a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Por lo tanto, al aplicar este cambio de variable, obtenemos:

$$\int f\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int f(a\tan\theta, a\sec\theta)a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

que es una integral en que el integrando esta formado con las funciones trigonométricas $\tan\theta$ y $\sec\theta$.

Al resolver esta integral tendremos como resultado una función $G(\theta)$ en términos de funciones trigonométricas. Es decir,

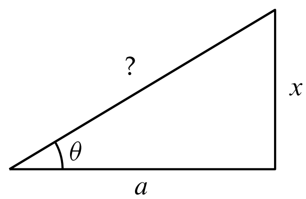
$$\int f\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right)\mathrm{d}x = \int f(a\tan\theta, a\sec\theta)a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = G(\theta) + C.$$

Para expresar este resultado en términos de la variable original x, debemos considerar:

$$x = a\tan\theta \ \Rightarrow\ \tan\theta = \frac{x}{a} \quad \& \quad \theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right); \text{ además,}$$
$$\sqrt{a^2+x^2} = a\sec\theta \ \Rightarrow\ \sec\theta = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}.$$

Se puede utilizar un triángulo rectángulo auxiliar generado de la forma siguiente:

$$\tan\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{cateto adyacente a } \theta}.$$



Donde se aplica el teorema de Pitágoras para determinar la hipotenusa:

$$? = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

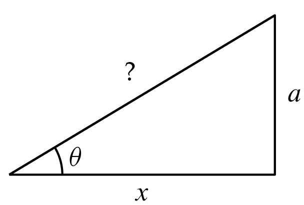
- Observación. Para calcular integrales de la forma $\int f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right) \mathrm{d}x$, también puede ser aplicado el cambio de variable $x = a\cot\theta$. En este caso:

  $$\sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2\cot^2\theta} = \sqrt{a^2\left(1 + \cot^2\theta\right)} = \sqrt{a^2\csc^2\theta} = a\csc\theta.$$

  Además $\mathrm{d}x = -a\csc^2\theta\,\mathrm{d}\theta$. El procedimiento es análogo al expuesto para $x = a\tan\theta$.

  En este caso el triángulo rectángulo auxiliar se genera de la forma siguiente:

  $$\cot\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto adyacente a } \theta}{\text{cateto opuesto a } \theta}.$$

  Donde se aplica el teorema de Pitágoras para determinar la hipotenusa:

  $$? = \sqrt{a^2 + x^2}.$$

Ejemplo 2.5.3 *Calcular la integral* $\int x^3\sqrt{x^2 + 9}\,\mathrm{d}x$.

▼ Debido a que $\sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{x^2 + 3^2}$, se propone $x = 3\tan\theta$.

Si $x = 3\tan\theta$, entonces $\mathrm{d}x = 3\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ y además

$$\sqrt{x^2 + 9} = \sqrt{3^2\tan^2\theta + 3^2} = \sqrt{3^2\left(\tan^2\theta + 1\right)} = \sqrt{3^2\sec^2\theta} = 3\sec\theta.$$

Por lo tanto,

$$\int x^3\sqrt{x^2+9}\,\mathrm{d}x = \int 3^3\tan^3\theta\cdot 3\sec\theta\cdot 3\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 3^5\int \tan^3\theta\sec^3\theta\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= 3^5\int \tan^2\theta\cdot\sec^2\theta\cdot\sec\theta\cdot\tan\theta\,\mathrm{d}\theta = 3^5\int\left(\sec^2\theta-1\right)\left(\sec^2\theta\right)\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\mathrm{d}\theta =$$

$\boxed{\text{Haciendo } y = \sec\theta \;\&\; \mathrm{d}y = \sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\mathrm{d}\theta.}$

$$= 3^5\int\left(y^2-1\right)y^2\,\mathrm{d}y = 3^5\int\left(y^4-y^2\right)\mathrm{d}y =$$
$$= 3^5\left[\frac{1}{5}y^5-\frac{1}{3}y^3\right]+C = 3^5y^3\left[\frac{1}{5}y^2-\frac{1}{3}\right]+C =$$
$$= 3^5y^3\left[\frac{3y^2-5}{15}\right]+C = \frac{3^5}{15}y^3\left(3y^2-5\right)+C = \frac{3^4}{5}y^3\left(3y^2-5\right)+C =$$

$\boxed{\text{Puesto que } y = \sec\theta.}$

$$= \frac{3^4}{5}(\sec\theta)^3\left[3(\sec\theta)^2-5\right]+C =$$

$\boxed{\text{Ya que } \sqrt{x^2+9} = 3\sec\theta.}$

$$= \frac{3^4}{5}\left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right)^3\left[3\left(\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}\right)^2-5\right]+C =$$
$$= \frac{3^4}{5}\frac{\left(\sqrt{x^2+9}\right)^3}{3^3}\left[\frac{1}{3}\left(x^2+9\right)-5\right]+C = \frac{3}{5}\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}\left[\frac{x^2+9-15}{3}\right] =$$
$$= \frac{3}{5}\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}\left(\frac{x^2-6}{3}\right)+C = \frac{1}{5}\left(x^2-6\right)\sqrt{\left(x^2+9\right)^3}+C.$$

□

Ejemplo 2.5.4 *Calcular la integral* $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

▼ Proponemos $x = a\tan\theta$, entonces $\mathrm{d}x = a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$ y además:

$$\sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\tan^2\theta+a^2} = \sqrt{a^2\left(\tan^2\theta+1\right)} = \sqrt{a^2\sec^2\theta} = a\sec\theta.$$

Por lo tanto,

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int\frac{a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{a\sec\theta} = \int\sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta|+C_1 = \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C_1 =$$
$$= \ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{a}\right|+C_1 = \ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right|-\ln|a|+C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$$

En particular: $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right|+C.$

□

2.5.3 Integrales $\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$

Como en los casos anteriores, nuestro primer objetivo es eliminar el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$ para lo cual convenimos en utilizar el cambio de variable $x = a \sec\theta$. Entonces:

$$x = a\sec\theta \;\Rightarrow\; \sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a\tan\theta.$$

Es decir, el cambio de variable $x = a\sec\theta$ permite eliminar el radical $\sqrt{x^2 - a^2}$ convirtiéndolo en:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta.$$

Además,

$$x = a\sec\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = a\sec\theta\tan\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

Por lo tanto, al aplicar este cambio de variable:

$$\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a\sec\theta, a\tan\theta) a\sec\theta \cdot \tan\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

que es una integral en la que el integrando está conformado con las funciones trigonométricas $\sec\theta$ y $\tan\theta$. Como en los casos anteriores, al resolver esta integral obtenemos como resultado una función $G(\theta)$ en términos de funciones trigonométricas. Es decir,

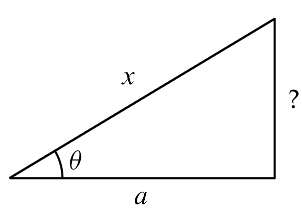
$$\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x = \int f(a\sec\theta, a\tan\theta) a\sec\theta \cdot \tan\theta \cdot \mathrm{d}\theta = G(\theta) + C.$$

Para expresar este resultado en términos de la variable original x, debemos considerar que:

$$x = a\sec\theta \;\Rightarrow\; \sec\theta = \frac{x}{a} \;\&\; \theta = \operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{a}\right); \quad \text{además}$$
$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta \;\Rightarrow\; \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{a}.$$

Se puede utilizar un triángulo rectángulo auxiliar generado de la manera siguiente:

$$\sec\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente a } \theta}.$$



Donde se aplica el teorema de Pitagóras para determinar

$$? = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

- Observación

  Para calcular integrales de la forma $\int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right) \mathrm{d}x$, también puede ser aplicado el cambio de variable

$$x = a\csc\theta.$$

En este caso:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \csc^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\csc^2\theta - 1)} = \sqrt{a^2\cot^2\theta} = a\cot\theta.$$

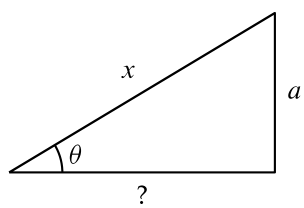
Además

$$\mathrm{d}x = -\csc\theta\cdot\cot\theta\cdot\mathrm{d}\theta.$$

El procedimiento es análogo al expuesto para $x = a\sec\theta$.

En este caso el triángulo rectángulo auxiliar se genera de la manera siguiente:

$$\csc\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto a }\theta}.$$



Donde se aplica el teorema de Pitagóras para determinar

$$? = \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Ejemplo 2.5.5 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x$.

▼ Debido a que $\sqrt{x^2-4} = \sqrt{x^2-2^2}$, se propone

$$x = 2\sec\theta \Rightarrow \mathrm{d}x = 2\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\mathrm{d}\theta$$

y además

$$\sqrt{x^2-4} = \sqrt{2^2\sec^2\theta - 2^2} = \sqrt{2^2(\sec^2\theta - 1)} = \sqrt{2^2\tan^2\theta} = 2\tan\theta.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{2^3\sec^3\theta}{2\tan\theta}(2\sec\theta\cdot\tan\theta)\,\mathrm{d}\theta = 2^3\int \sec^4\theta\,\mathrm{d}\theta = 2^3\int \sec^2\theta\cdot\sec^2\theta\cdot\mathrm{d}\theta =$$
$$= 8\int \left(1+\tan^2\theta\right)\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\int\left(1+y^2\right)\mathrm{d}y =$$

$\boxed{\text{Donde } y = \tan\theta \text{ \& } \mathrm{d}y = \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta.}$

$$= 8\left[y + \frac{1}{3}y^3\right] + C = 8\tan\theta + \frac{8}{3}\tan^3\theta + C.$$

Pero como $\sqrt{x^2-4} = 2\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2-4}}{2}$.

Entonces:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-4}}\,\mathrm{d}x = 8\tan\theta + \frac{8}{3}\tan^3\theta + C = 8\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right] + \frac{8}{3}\left[\frac{\sqrt{x^2-4}}{2}\right]^3 + C =$$
$$= 4\sqrt{x^2-4} + \frac{1}{3}\sqrt{(x^2-4)^3} + C.$$

□

Ejemplo 2.5.6 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

▼ Si se propone:

$$x = a\sec\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = a\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\mathrm{d}\theta$$

y además

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta-1)} = \sqrt{a^2\tan^2\theta} = a\tan\theta.$$

Entonces:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \int \frac{a\sec\theta\cdot\tan\theta\cdot\mathrm{d}\theta}{a\tan\theta} = \int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C_1.$$

Sin embargo:

$$x = a\sec\theta \;\Rightarrow\; \sec\theta = \frac{x}{a} \quad \& \quad \sqrt{x^2-a^2} = a\tan\theta \;\Rightarrow\; \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}.$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln|\sec\theta+\tan\theta| + C_1 = \ln\left|\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1 = \ln\left|\frac{x+\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right| + C_1 =$$
$$= \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| - \ln|a| + C_1 = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C.$$

En particular:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C.$$

□

- Observación

  Los cambios de variable aplicados para eliminar a los radicales $\sqrt{a^2-x^2}$, $\sqrt{a^2+x^2}$ & $\sqrt{x^2-a^2}$, pueden ser utilizados también para calcular integrales en cuyos integrandos no se tengan explícitamente dichos radicales, sino solamente los binomios de los radicandos.

Ejemplo 2.5.7 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2}$.

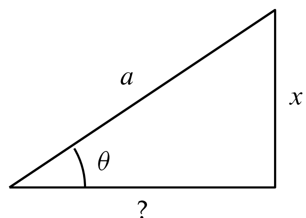
▼ Con el cambio de variable

$$x = a\,\mathrm{sen}\,\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{d}x = a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,$$

obtenemos:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-x^2} = \int \frac{a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{a^2-a^2\mathrm{sen}^2\theta} = \int \frac{a\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{a^2(1-\mathrm{sen}^2\theta)} = \frac{a}{a^2}\int \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}\,\mathrm{d}\theta =$$
$$= \frac{1}{a}\int \frac{1}{\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{a}\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{a}\ln|\sec\theta+\tan\theta| + C.$$

$$x = a\,\mathrm{sen}\,\theta \;\Rightarrow\; \mathrm{sen}\,\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}}.$$



Usando el teorema de Pitagóras:

$$? = \sqrt{a^2 - x^2};$$

tenemos entonces:

$$\sec\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad \& \quad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Por lo tanto,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a}\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{(a + x)}{\sqrt{a - x}\sqrt{a + x}}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{\sqrt{a + x}}{\sqrt{a - x}}\right| + C = \frac{1}{a}\ln\left|\left(\frac{a + x}{a - x}\right)^{\frac{1}{2}}\right| + C =$$

$$= \frac{1}{a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right|^{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{2}\right)\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C.$$

Esto es:

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a + x}{a - x}\right| + C.$$

□

Ejemplo 2.5.8 *Calcular la integral* $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

▼

$$x = a\tan\theta \ \Rightarrow \ dx = a\sec^2\theta\, d\theta.$$

Luego,

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{(a^2\tan^2\theta + a^2)^2} = \int \frac{a\sec^2\theta\, d\theta}{[a^2(\tan^2\theta + 1)]^2} = \int \frac{a\sec^2\theta}{a^4(\sec^2\theta)^2}\, d\theta =$$

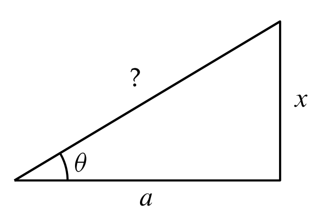
$$= \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{\sec^2\theta}\, d\theta = \frac{1}{a^3}\int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{a^3}\int \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2a^3}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right] + C = \frac{1}{2a^3}\left[\theta + \frac{1}{2}(2\operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta)\right] + C =$$

$$= \frac{1}{2a^3}[\theta + \operatorname{sen}\theta\cdot\cos\theta] + C.$$

Ahora:

$$x = a\tan\theta \ \Rightarrow \ \tan\theta = \frac{x}{a} = \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{cateto adyacente a } \theta}.$$



Por el teorema de Pitagóras:

$$? = \sqrt{x^2 + a^2}.$$

Además, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ & $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. Así también:

$$\tan\theta = \frac{x}{a} \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{x}{a}\right).$$

Por lo tanto:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\left[\theta + \operatorname{sen}\theta \cdot \cos\theta\right] + C = \frac{1}{2a^3}\left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}\,\frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}}\right] + C =$$
$$= \frac{1}{2a^3}\left[\arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{ax}{x^2 + a^2}\right] + C.$$

□

Ejemplo 2.5.9 *Demostrar que* $\displaystyle\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{4}$.

▼ Con el cambio de variable,

$$x = r\operatorname{sen}\theta \Rightarrow dx = r\cos\theta\, d\theta \;\&\; \sqrt{r^2 - x^2} = r\cos\theta.$$

Obtenemos:

$$x = 0 \Rightarrow r\operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 0 \Rightarrow \theta = 0 \;\&\; x = r \Rightarrow r\operatorname{sen}\theta = r \Rightarrow \operatorname{sen}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r\cos\theta) r\cos\theta\, d\theta = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)\, d\theta =$$
$$= \frac{r^2}{2}\left[\theta + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{r^2}{2}\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\pi\right) - \left(0 + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 0\right)\right] =$$
$$= \frac{r^2}{2}\left[\frac{\pi}{2} + 0 - 0\right] = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi r^2}{4}.$$

Esto es:

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \frac{\pi r^2}{4}.$$

□

Ejercicios 2.5.1 *Sustitución trigonométrica.* *Soluciones en la página* 13
Aplicar la técnica de sustitución trigonométrica para calcular las siguientes integrales indefinidas y derivar para verificar cada resultado.

1. $\displaystyle\int x^3\sqrt{1 - x^2}\, dx$.
2. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2 + 1}\, dx$.
3. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2 - 1}\, dx$.
4. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9 - x^2}}\, dx$.
5. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}}\, dx$.
6. $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{9 + x^2}}\, dx$.
7. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x^4}\, dx$.
8. $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx$.
9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2 - 4}}$.
10. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^4}\, dx$.
11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{x^3}\, dx$.
12. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2 - x^2}\, dx$.
13. $\displaystyle\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$.

14. $\int \sqrt{x^2-4}\,\mathrm{d}x.$

15. $\int \sqrt{4+x^2}\,\mathrm{d}x.$

16. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$

17. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x\left(x^2-4\right)^{\frac{3}{2}}}.$

18. $\int \frac{x^2}{\left(9+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x.$

Ejercicios 2.5.1 *Sustitución trigonométrica.* *Preguntas: página* 11

1. $-\frac{1}{15}\left(3x^2+2\right)\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}+C.$
2. $\frac{1}{15}\left(3x^2-2\right)\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}+C.$
3. $\frac{1}{15}\left(3x^2+2\right)\sqrt{\left(x^2-1\right)^3}+C.$
4. $-\frac{1}{3}\left(x^2+18\right)\sqrt{9-x^2}+C.$
5. $\frac{1}{3}\left(x^2+18\right)\sqrt{x^2-9}+C.$
6. $\frac{1}{3}\left(x^2-18\right)\sqrt{9+x^2}+C.$
7. $-\frac{\sqrt{\left(x^2+4\right)^3}}{12x^3}+C.$
8. $2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$
9. $\frac{x^2+2}{8x^3}\sqrt{x^2-4}+C.$
10. $\frac{-1}{3a^2x^3}\sqrt{\left(a^2-x^2\right)^3}+C.$
11. $\frac{1}{2a}\left[-\frac{a}{x^2}\sqrt{a^2+x^2}+\ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}-a}{x}\right)\right]+C.$
12. $\frac{a^4}{8}\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)-\frac{1}{8}x\left(a^2-2x^2\right)\sqrt{a^2-x^2}+C.$
13. $2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{2}\right)+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+C.$
14. $\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\ln\left(x+\sqrt{x^2-4}\right)+C.$
15. $\frac{x}{2}\sqrt{4+x^2}+2\ln\left(\sqrt{4+x^2}+x\right)+C.$
16. $\frac{2x^2-1}{x\sqrt{1-x^2}}+C.$
17. $-\frac{1}{8}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}+\operatorname{arcsec}\left(\frac{x}{2}\right)\right]+C.$
18. $\ln\left(\sqrt{9+x^2}+x\right)-\frac{x}{\sqrt{9+x^2}}+C.$